ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы V Всероссийской конференции

Омск, 2–6 июля 2012 г.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА
ОМСКИЙ ФИЛИАЛ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Материалы V Всероссийской конференции

Омск, 2 – 6 июля 2012 г.

Омск 2012

УДК 519.72
ББК 32.811я43
П 781

Рекомендовано к изданию
редакционно-издательским советом ОмГУ

П 781 **Проблемы оптимизации и экономические приложения :** материалы V Всероссийской конференции (Омск, 2 – 6 июля 2012). – Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2012. – 222 с.

ISBN 978-5-7779-1437-8

Представлены исследования известных специалистов и молодых ученых по направлениям: математическое программирование, дискретная оптимизация, исследование операций, математические модели и методы оптимизации в экономике, управлении, проектировании, образовании, параллельные вычисления при решении задач оптимизации.

Для ученых, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся по прикладной математике, в том числе в области оптимизации и исследования операций.

УДК 519.72
ББК 32.811я43

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-06054-г)
и Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского

Редакционная коллегия:
А.В. Адельшин, П.А. Борисовский, А.В. Еремеев, Л.А. Заозерская,
В.П. Ильев, Н.А. Косарев, А.Ю. Лагздин, Т.В. Леванова, А.А.Навроцкая,
Т.Г. Орловская, К.Н. Пахомова, А.В. Плясунов, А.А. Романова,
Р.Ю. Симанчев, В.А. Филимонов, Т.А. Щербинина

Оригинал-макет подготовили:
П.А. Борисовский, А.Ю. Лагздин, Т.В. Леванова,
А.А. Романова, М.Ф. Рыбалка, Т.А. Щербинина

Ответственный за выпуск – А.А. Романова

Адрес Оргкомитета:
644099, Омск-99, ул. Певцова, 13
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева
E-mail: omsk12@ofim.oscsbras.ru
тел. (3812) 23-67-39
http://www.ofim.oscsbras.ru /~omsk12

ISBN 978-5-7779-1437-8

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН», 2012
© Оформление. ФГБОУ «ОмГУ им. Ф.М. Достоевского», 2012

V Всероссийская конференция
Проблемы оптимизации и экономические приложения

- Ассоциация математического программирования
- Российский фонд фундаментальных исследований
- Омский научный центр СО РАН
- Министерство образования Омской области
- Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН
- Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
- Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия
- Омская экономическая лаборатория Института экономики и ОПП СО РАН
- Омская государственная областная научная библиотека им. А.С. Пушкина
- Омский Дом ученых

Дорогие коллеги и друзья!

Мы рады приветствовать вас в Омске на V Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Важной особенностью нашей новой встречи является проведение совместных заседаний с VIII международной Азиатской школой-семинаром «Проблемы оптимизации сложных систем».

Мы очень надеемся, что объединение усилий ученых России Казахстана, Узбекистана, Киргизии и других стран будет способствовать дальнейшему развитию нашего научного направления и его приложений в экономике, управлении, проектировании и других областях.

Желаем вам успешного представления научных результатов, интересных и плодотворных дискуссий, новых творческих удач и приятного дружеского общения!

С наилучшими пожеланиями,
Председатель Оргкомитета *А.А. Колоколов*

Программный комитет

Антипин А.С.	ВЦ РАН, Москва
Бахтин А.Е.	Новосибирск
Береснев В.Л.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Бояркин Г.Н.,	ОмГТУ, Омск
Валеева А.Ф.	УГАТУ, Уфа
Васильев В.А.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Гимади Э.Х.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Евтушенко Ю.Г.	ВЦ РАН, Москва
Еремин И.И.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург
Журавлев Ю.И.	ВЦ РАН, Москва
Заботин Я.И.	КГУ, Казань
Забудский Г.Г.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Зоркальцев В.И.	ИСЭМ СО РАН, Иркутск
Карпов В.В.	ОЭЛ ИЭ и ОПП СО РАН, Омск
Кельманов А.В.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Колоколов А.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (председатель)
Кочетов Ю.А.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Леонтьев В.К.	ВЦ РАН, Москва
Мазуров Вл. Д.	УрФУ, Екатеринбург
Нурминский Е.А.	ИАиПУ ДВО РАН, Владивосток
Панюков А.В.	ЮУрГУ, Челябинск
Попков В.К.	ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск
Попов Л.Д.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург
Потапов В.И.	ОмГТУ, Омск
Рой О.М.	ОмГУ, Омск
Рудаков К.В.	ВЦ РАН, Москва
Сервах В.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Скарин В.Д.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург
Соловьев А.А.	СибАДИ, Омск
Стрекаловский А.С.	ИДСТУ СО РАН, Иркутск
Хамисов О.В.	ИСЭМ СО РАН, Иркутск
Хачай М.Ю.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург
Шевченко В.Н.	ННГУ, Нижний Новгород

Локальный организационный комитет

Колоколов А.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (председатель Оргкомитета)
Забудский Г.Г.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (заместитель председателя Оргкомитета)
Еремеев А.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (ученый секретарь Оргкомитета)
Адельшин А.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Борисовский П.А.	ОмГУ, Омск
Бурлаков Ю.А.	ОмГУ, Омск
Заозерская Л.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Коваленко Ю.В.	ОмГУ, Омск
Косарев Н.А.	ОНЦ СО РАН, Омск
Лагздин А.Ю.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Леванова Т.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Орловская Т.Г.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Романова А.А.	ОмГУ, Омск
Рыбалка М.Ф.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Сервах В.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Щербинина Т.А.	ОмГУ, Омск

АЛГОРИТМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В.Л. Береснев

Рассматривается математическая модель, являющаяся обобщением известной задачи размещения предприятий [1, 2]. В этой модели в отличие от задачи размещения имеются две соперничающие стороны, которые последовательно открывают свои предприятия, стремясь "захватить" потребителей и максимизировать получаемую прибыль.

Принятие решений соперничающими сторонами можно рассматривать как игру Штакельберга, а стороны, следуя терминологии игры, называть Лидером и Последователем. Получаемая математическая модель представляет собой задачу двухуровневого математического программирования, включающую задачу верхнего уровня (задачу Лидера) и нижнего уровня (задачу Последователя). Обе эти задачи являются задачами размещения с порядками. Порядки необходимы для задания предпочтений пользователей и определения правила "захвата" потребителя Лидером или Последователем.

Для задачи конкурентного размещения предприятий предлагается алгоритм ветвей и границ, позволяющий находить оптимальные решения задачи. В качестве оптимальных рассматриваются так называемые оптимальные некооперативные и оптимальные кооперативные решения. Это связано с тем, что из-за возможной неединственности оптимального решения задачи нижнего уровня понятие оптимальности для задачи конкурентного размещения предприятий нуждается в уточнении. При построении алгоритма исследуемая задача представляется как задача максимизации псевдобулевой функции от числа переменных, равного числу возможных мест размещения предприятий Лидера. Эта функция задается неявным образом и для вычисления ее значения необходимо найти оптимальные решения двух задач целочисленного линейного программирования. Важным элементом алгоритма является предлагаемый способ вычисления верхней границы значений рассматриваемой псевдобулевой функции на подмножествах решений. Одновременно с вычислением верхней границы определяется допустимое решение из рассматриваемого подмножества, которое дает нижнюю границу для оптимального значения целевой функции. Для вычисления начального рекордного решения в предлагаемом алгоритме используется процедура локального поиска с окрестностью специального вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005.
2. Discrete location theory (eds. Mirchandani P.B., Francis R.L.). – New York: John Wiley and Sons, 1990.

© Береснев Владимир Леонидович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-28-92, факс (383) 333-25-98.
E-mail: beresnev@math.nsc.ru

ПРОБЛЕМА ПАМЯТИ В ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ НА ГРАФАХ ОГРАНИЧЕННОЙ ДРЕВОВИДНОЙ ШИРИНЫ

В.В. Быкова

Метод динамического программирования на основе дерева декомпозиции — один из современных способов преодоления вычислительной сложности NP-трудных задач на графах ограниченной древовидной ширины с помощью FPT-алгоритмов (Fixed-Parameter-Tractable algorithms) [3]. Он сочетает в себе декомпозиционный подход к решению задачи с декомпозиционным представлением входного графа, когда выделение подзадач и построение их решений осуществляется исходя из этого представления. Время выполнения FPT-алгоритмов в этом случае полиномиально зависит от длины входа и неполиномиальным образом от параметра — древовидной ширины входного графа [1]. Такие алгоритмы позволяют решать графовые задачи большой размерности при малых значениях параметра. Несмотря на теоретическую привлекательность метода динамического программирования по дереву декомпозиции, практическое его применение ограничивается двумя проблемами, первая из них связана с высокими потребностями в памяти получаемых FPT-алгоритмов, а вторая с вычислением древовидной ширины и построением дерева декомпозиции [2]. В данной работе предложено проблему памяти решать с помощью бинарного сепараторного дерева декомпозиции (B&S-дерева), которое обеспечивает компромисс между размером и числом таблиц динамического программирования. В работе доказано, что всякое фундаментальное дерево декомпозиции n-вершинного графа, имеющее ширину k и $O(n)$ узлов, может быть преобразовано за время $O(n)$ в B&S-дерево, которое обладает той же шириной и $O(n)$ узлами. Теоретически обоснованы следующие достоинства B&S-дерева: переход от бинарного корневого дерева декомпозиции к B&S-дереву увеличивает число таблиц не более чем в два раза; B&S-дерево позволяет удерживать размер всякой таблицы динамического программирования в пределах оценки $O(k \cdot q^k)$, где q — число состояний, в которых может находиться вершина графа к возможному решению. В работе техника таблиц описана на языке реляционной алгебры и с привлечением свойств ациклических гиперграфов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быкова В.В. FPT-алгоритмы и их классификация на основе эластичности // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 2(12). – С. 40-48.
2. Быкова В.В. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // Прикладная дискретная математика. – 2011. – № 3(13). – С. 65-79.
3. Bodlaender H.L. Treewidth: Algorithmic techniques and results // Proc. 22nd MFCS, Springer-Verlag, LNCS 1295. – 1997. – P. 19-36.

© Быкова Валентина Владимировна,
Институт математики, Сибирский федеральный университет,
пр-т Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия, тел./факс (391) 206-21-67.
E-mail: bykvalen@mail.ru

О РАВНОВЕСИИ ВАЛЬРАСА В МНОГОРЕГИОНАЛЬНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В.А. Васильев

1. Основное содержание доклада составляет обсуждение условий существования равновесия Вальраса для моделей межрегионального экономического взаимодействия, изучавшихся в работах [1,2,3,5]. В отличие от сложных технических предположений, фигурирующих в анонсировавшемся ранее результате из [5], найденные автором условия исчерпываются строгой автаркичностью (простым аналогом стандартного условия Слейтера) и ограниченностью ресурсно-технологических возможностей всех регионов. Получена кооперативная характеризация равновесия Вальраса, устанавливающая совпадение множеств вальрасовских и эджвортовских планов для широкого класса моделей взаимодействия. Указанный результат применяется для отыскания условий существования равновесия Вальраса при неограниченности множеств региональных планов участников.

Как и в традиционной схеме равновесного анализа, разработанной для исследования классической модели Эрроу-Дебре, ключевую роль в предлагаемом подходе к анализу условий существования при ограниченности множеств региональных планов играет известная геометрическая лемма Гейла [4]. Что касается подхода, развиваемого для моделей, не удовлетворяющих условию ограниченности, то здесь принципиальное значение имеет такой фундаментальный результат равновесного анализа, как теорема Скарфа о непустоте ядер кооперативных игр [6]. При этом в обоих случаях большое внимание уделяется учету важной особенности изучаемых моделей, состоящей в полиэдральности допустимых множеств и линейности целевых функций их участников.

2. Рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [5]:

$$\mathcal{M} =< R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R} >,$$

где $R = \{1, \ldots, r\}$ – множество регионов; A^s – матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$; G^s и H^s – матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$; b^s – вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$; d^s – вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Региональные ресурсно-технологические возможности Z_s для каждого $s \in R$ определяются формулой

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbf{R}^{l_s}_+ \times \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}^n_+ \times \mathbf{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

где неотрицательные вектор-стобцы $x^s = (x^s_i)^{l_s}_{i=1}$, $u^s = (u^s_j)^n_{j=1}$, $v^s = (v^s_j)^n_{j=1}$ указывают объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно, а число $\lambda_s \in \mathbf{R}_+$ – степень достижения целей регионального развития для $s \in R$. Элементы множества Z_s будем называть *планами* региона s.

Напомним [5], что целевые функции $t_s : Z_s \to \mathbf{R}$ регионов s, характеризующие степень достижения целей их развития, имеют вид:

$$t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R. \tag{1}$$

Положим $Z_{\mathcal{M}} := \prod_{s\in R} Z_s$ и через $Z_{\mathcal{M}}(R)$ обозначим совокупность *сбалансированных планов* модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}} \mid \sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s\}.$$

Важную роль в дальнейшем играют так называемые *строго автаркические планы*, под которыми понимаются элементы множеств

$$Z^0_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R$$

(как обычно, $x \gg y$ для $x, y \in \mathbf{R}^m$ означает, что $x_k > y_k$ для всех $k = 1, \ldots, m$). Регион $s \in R$ будем называть *строго автаркическим*, если $Z^0_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset$.

Отметим также, что при анализе условий ограниченности множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$ потребуется рассмотрение множества $Z^0_{\mathcal{M}}(R)$ сбалансированных планов *однородной составляющей модели* $\mathcal{M}$, определяемой формулой

$$\mathcal{M}_0 =< R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s\in R} > . \tag{2}$$

Согласно формуле (2), модель $\mathcal{M}_0$ отличается от $\mathcal{M}$ лишь тем, что её начальный ресурсно-технологический потенциал равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

3. В дальнейшем используется следующее определение вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия $\mathcal{M}$ (см., например, [5]).

Определение 1. Будем говорить, что план $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ является *вальрасовским*, если существует ненулевой вектор цен $\bar{p} \in \mathbf{R}^n_+$ такой, что $\bar{p}\cdot\bar{u}^s \geq \bar{p}\cdot\bar{v}^s$ для всех $s \in R$, и при этом для любых $s \in R$ и $(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ справедлива импликация

$$\bar{p}\cdot u^s \geq \bar{p}\cdot v^s \Rightarrow \bar{\lambda}_s \geq \lambda_s$$

(как обычно, выражение $x \cdot y$ означает скалярное произведение векторов x и y).

Совокупность вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $W(\mathcal{M})$. Напомним еще [5], что цены $\bar{p}$, фигурирующие в определении 1, называются *равновесными ценами*, а пара $(\bar{z}, \bar{p})$ – *равновесием Вальраса* модели $\mathcal{M}$. Как вытекает из определения 1, региональные планы $\bar{z}^s = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)$, $s \in R$, образуют равновесный план модели $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда они сбалансированы ($(\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$) и при некоторых ненулевых ценах $\bar{p} \in \mathbf{R}^n_+$ доставляют максимальное значение целевым функциям t_s (заданным формулой (1)) на *бюджетных множествах* $B_s(\bar{p})$, $s \in R$. Последние определяются стандартными стоимостными соотношениями регионального экспорта-импорта: $B_s(\bar{p}) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid \bar{p}\cdot u^s \geq \bar{p}\cdot v^s\}$, $s \in R$.

Один из основных результатов доклада заключается в том, что простейшие условия, гарантирующие существование вальрасовских планов модели $\mathcal{M}$, представляют собой достаточно естественные усиления приводившихся в [1] требований автаркичности регионов и ограниченности множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$, обеспечивающих непустоту ядра модели $\mathcal{M}$ (ниже под ограниченностью ресурсно-технологических возможностей регионов $s \in R$ понимается ограниченность соответствующих множеств Z_s).

Теорема 1. Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические, а их ресурсно-технологические возможности ограниченные, то в $\mathcal{M}$ существует равновесие Вальраса.

4. Для кооперативной характеризации вальрасовских планов напомним необходимые определения из [5], где был введен один из основных принципов оптимальности

для рассматриваемого класса моделей – понятие равновесия Эджворта. Несколько модифицируя классическое определение реплики в моделях типа Эрроу-Дебре [4,6], введём сначала определение *дробления (измельчения) модели* $\mathcal{M}$. Зафиксируем $k \geq 1$ и положим

$$R_{[k]} := \{(s,m) \mid s \in R,\ m = 1,\dots,k\}. \tag{3}$$

Далее, для каждой из k долей $(s,1),\dots,(s,k)$ региона s введём матрицы A^{sm}, G^{sm}, H^{sm} и векторы b^{sm}, d^{sm}, полагая

$$A^{sm} := A^s,\ G^{sm} := G^s,\ H^{sm} := H^s,\ b^{sm} := \frac{1}{k}b^s,\ d^{sm} := d^s, \quad m = 1,\dots,k. \tag{4}$$

Определение 2. Модель многорегиональной экономической системы

$$\mathcal{M}_{[k]} :=< R_{[k]}, \{A^{sm}, G^{sm}, H^{sm}, b^{sm}, d^{sm}\}_{(s,m)\in R_{[k]}} >, \tag{5}$$

параметры которой определяются соотношениями (3), (4), будем называть *дроблением ранга k (k-дроблением) модели $\mathcal{M}$.*

Как и в исходной модели $\mathcal{M}$, целевые функции $t_{sm} : Z_{sm} \to \mathbf{R}$ регионов (s,m) дробления $\mathcal{M}_{[k]}$ определяются формулой

$$t_{sm}(x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) := \lambda_{sm}, \quad (s,m) \in R_{[k]}.$$

Отметим, что в силу соотношений между параметрами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_{[k]}$, для множеств

$$Z_{sm} = \{z^{sm} = (x^{sm}, u^{sm}, v^{sm}, \lambda_{sm}) \geq 0 \mid A^{sm}x^{sm} + G^{sm}u^{sm} + H^{sm}v^{sm} \geq b^{sm} + \lambda_{sm}d^{sm}\}$$

ресурсно-технологических возможностей регионов $(s,m) \in R_{[k]}$ модели $\mathcal{M}_{[k]}$ выполняются равенства

$$Z_{sm} = \frac{1}{k}Z_s \quad \text{для каждого} \ \ s \in R \ \ \text{и}\ m = 1,\dots,k.$$

В рассматриваемых далее случаях ранг дробления модели $\mathcal{M}$ однозначно определяется из контекста. Поэтому (а также во избежание излишней громоздкости) символ этого ранга в обозначении параметров модели $\mathcal{M}_{[k]}$ опускается.

Как видно из определения дробления ранга k, каждый из регионов $s \in R$ исходной системы $\mathcal{M}$ "расщепляется" в $\mathcal{M}_{[k]}$ на k идентичных регионов $(s,1),\dots,(s,k)$, отличающихся от s только в одном отношении: имеющиеся в их распоряжении ресурсы составляют k-тую долю ресурсов региона s. Рост числа регионов и уменьшение их потенциалов повышает уровень конкуренции в новой системе $\mathcal{M}_{[k]}$, что позволяет, согласно известной гипотезе Эджворта [4,7], рассчитывать на более точную оценку множества вальрасовских планов с помощью ядер дроблений (по сравнению с ядром исходной системы $\mathcal{M}$). В этом смысле вводимое далее понятие равновесия Эджворта является "предельным" вариантом развития указанной идеи аппроксимации вальрасовских планов неблокируемыми в системах типа (5), моделирующих рост совершенной конкуренции при возрастании ранга дробления регионов системы $\mathcal{M}$.

Положим $Z_{[k]} := Z_{\mathcal{M}_{[k]}} = \prod_{(s,m)\in R_{[k]}} Z_{sm}$ и, как и ранее, через $Z(R_{[k]})$ будем обозначать совокупность сбалансированных планов модели $\mathcal{M}_{[k]}$:

$$Z(R_{[k]}) := \{(z^{sm})_{(s,m)\in R_{[k]}} \in Z_{[k]} \mid \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} u^{sm} \geq \sum_{(s,m)\in R_{[k]}} v^{sm}\}.$$

Наконец, для $k \geq 1$ через $z_{[k]}$ обозначим *k-дробление плана* $z = (z^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, построенное из региональных составляющих z^s плана z по формуле:

$$(z_{[k]})^{sm} := \frac{1}{k} z^s, \quad s \in R, \ m = 1, \ldots, k.$$

Ясно, что $z_{[k]}$ принадлежит $Z(R_{[k]})$, поскольку на основании сбалансированности z получаем неравенство

$$\sum_{(s,m) \in R_{[k]}} u^{sm} = \sum_{s \in R} u^s \geq \sum_{s \in R} v^s = \sum_{(s,m) \in R_{[k]}} v^{sm},$$

доказывающее сбалансированность плана $z_{[k]}$ в модели $\mathcal{M}_{[k]}$.

Завершая описание конструкции, используемой для определения эджвортовских планов модели $\mathcal{M}$, напомним еще аналог традиционного блокирования в модели $\mathcal{M}$.

Определение 3 [1,5]. Коалиция $T \subseteq R$ *блокирует* $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, если у неё имеется такой план $(z^s)_{s \in T} = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in T} \in \prod_{s \in T} Z_s$, для которого выполняются соотношения

(1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in T$,

(2) $\sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s$.

Множество всех планов $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, которые не блокируются никакой коалицией $T \subseteq R$, будем обозначать через $C(\mathcal{M})$ и называть *ядром модели* $\mathcal{M}$.

Сформулируем, наконец, для модели межрегионального взаимодействия определение эджвортовского плана[1] – кооперативного решения, тесно связанного, как будет видно из дальнейшего, с изучаемым понятием вальрасовского равновесия.

Определение 4 [2]. План $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ называется *эджвортовским планом модели* $\mathcal{M}$, если все его k-дробления содержатся в ядрах соответствующих дроблений $\mathcal{M}$:

$$\bar{z}_{[k]} \in C(\mathcal{M}_{[k]}) \quad \text{для каждого} \quad k \geq 1.$$

Совокупность эджвортовских планов модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $E(\mathcal{M})$.

Как уже отмечалось в работе [2], всегда имеет место вложение $W(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M})$. Обратное соотношение требует дополнительных предположений, одно из которых является модификацией классического требования отсутствия точек насыщения экономических агентов.

Определение 5. Регион $s \in R$ называется *ненасыщенным*, если для него выполняется неравенство

$$\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{z^s \in \widehat{Z}_s} t_s(z^s),$$

где $\widehat{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s} Z_{\mathcal{M}}(R)$.

Один из главных результатов доклада устанавливает эквивалентность вальрасовских и эджвортовских равновесий для обширного класса межрегиональных экономических систем.

Теорема 2. Если все регионы системы $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то множества ее вальрасовских и эджвортовских планов совпадают:

$$W(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M}).$$

[1] Аналогичное понятие вводилось и изучалось ранее лишь для классической модели Эрроу-Дебре и некоторых её модификаций, указанных, например, в [7].

Важность теоремы 2 заключается в том, что она позволяет свести вопрос о существовании вальрасовских планов системы $\mathcal{M}$ к аналогичному вопросу, касающемуся эджвортовских планов. При этом, как показывает работа [2], исследование условий непустоты множества $E(\mathcal{M})$ допускает прямое применение традиционных средств равновесного анализа и теории игр, включая известную теорему Скарфа об условиях непустоты ядер кооперативных игр.

В заключение доклада обсуждаются возможности применения теоремы 2 в вопросах существования вальрасовских планов при отсутствия "рога изобилия" (когда при нулевом экономическом потенциале в рассматриваемой системе возможна лишь нулевая экономическая активность). Отметим, что указанное условие $Z^0_{\mathcal{M}}(R) = \{0\}$ в изучаемой линейной модели обеспечивает ограниченность множества $Z_{\mathcal{M}}(R)$, но уже не предполагает ограниченности множеств $Z_s,\ s \in R$.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-06-00168а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. XII, № 4(40). – С. 23-34.
2. Васильев В.А., Суслов В.И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. XIII, № 1(41). – С. 18-33.
3. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. – Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во, 2007.
4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972.
5. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
6. Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983.
7. Vasil'ev V.A. On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets // Siberian Advances in Mathematics. – 1996. – V. 6, № 3. – P. 96-150.

© Васильев Валерий Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383)333-28-92, факс (383)333-25-98.
E-mail: vasilev@math.nsc.rul

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

Э.Х. Гимади

Введение. В докладе представлен обзор результатов исследований в области построения алгоритмов с оценками для решения некоторых труднорешаемых задач маршрутизации, проводимых в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН за последние 50 лет, отсчитываемых от времени появления, возможно, первых результатов в этом направлении, полученных в работе А.А. Боровкова [4].

Пусть $OPT(I)$ — оптимальное значение целевой функции задачи на входе I, а $f_A(I)$ — значение целевой функции, найденное в результате работы алгоритма A.

Следуя [7], говорим, что алгоритм A *имеет оценки* $\varepsilon_A(n)$ и $\delta_A(n)$ в классе рассматриваемых задач размерности n, если на множестве входов выполняется вероятностное неравенство: $\Pr\{|f_A(I) - OPT(I)| > \varepsilon_A(n)\} \leq \delta_A(n)$, где $\varepsilon_A(n)$ — верхняя оценка *относительной погрешности* решения, полученного алгоритмом A, и $\delta_A(n)$ — верхняя оценка *вероятности несрабатывания* алгоритма A (доля случаев, когда алгоритм A не гарантирует получение решения с анонсированной погрешностью).

Точностью алгоритма A называют величину $\rho = \rho_A(n)$, принимающую значение $\Big(1 + \varepsilon_A(n)\Big)$ для задачи на минимум и $\Big(1 - \varepsilon_A(n)\Big)$ для задачи на максимум. Далее через A_ρ обозначаем алгоритм с гарантированной оценкой точности ρ.

Алгоритм A называем *асимптотически точным* на классе рассматриваемых задач, если показано существование оценок $\varepsilon_A(n) \to 0$ и $\delta_A(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Через C_n обозначим класс $n \times n$-матриц (c_{ij}), элементами которых являются случайные независимые величины из отрезка (a_n, b_n), $a_n > 0$, с общей функцией распределения $\mathcal{P}_\xi(x) = Pr\{\xi < x\}$ случайной переменной $\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n)$, $0 \leq \xi \leq 1$.

1. Задача коммивояжера и ее обобщения. К числу наиболее известных задач маршрутизации относится задача коммивояжера (ЗК). В общем случае эта задача MAX SNP-трудна, т. е. из существования полиномиальной аппроксимационной схемы для ее решения следует $P = NP$. Хороший обзор по ЗК дан в [25].

Один из первых алгоритмов с оценками для решения ЗК содержится в статье А.А. Боровкова [4], опубликованной ровно 50 лет тому назад. В ней рассматриваются n точек внутри ограниченной, односвязной, с достаточно гладкой границей области Ω в k-мерном евклидовом пространстве. Функция распределения (ф.р.) точек внутри Ω имеет непрерывную плотность, всюду отличную от нуля.

Алгоритм АБ (Боровков, 1962 г.): Область Ω разрезается на систему из T цилиндрических полос с $(k-1)$-мерным кубом в сечении $x_1 = const$. Все точки каждой полосы соединяются ломаной линией с монотонным изменением x_1. Эти ломаные специальным образом соединяются T перемычками в одну замкнутую ломаную.

Утверждение [4]. *В случае равномерного распределения точек в единичном квадрате АБ решает ЗК за время $O(n \log n)$ с оценками $\varepsilon_n = 0.48$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Асимптотически точный подход впервые был предложен для приближенного решения ЗК на случайных матрицах из класса C_n с использованием алгоритма АИБ ("Иди в ближайший непройденный город") с трудоемкостью $O(n^2)$ [11, 15].

В случае непрерывной ф.р. элементов матрицы (c_{ij}) из класса C_n, АИБ асимптотической точен при $b_n/a_n = o\big(n/\max\{n\gamma_n, J_n\}\big)$, $J_n = \int_{\gamma_n}^1 dx/\mathcal{P}_\xi(x) \to \infty$, где $\mathcal{P}_\xi(x) = Pr\{\xi \leq x\}$, $0 \leq x \leq 1$; γ_n — корень уравнения $\mathcal{P}_\xi(x) = 1/n$ [11].

В случае дискретной ф.р. $p(k) = \Pr\{c_{ij} = k\}$, $k = \overline{1, r_n}$, алгоритм АИБ асимптотически точен, если $\sum_{k=1}^{r_n}(p(1)+\ldots+p(k))^{-1} = o(n)$ [15]. **В случае равномерного распределения** алгоритм АИБ асимптотически точен, если элементы матрицы отличаются друг от друга не более, чем в $o\big(n/\log n\big)$ раз [11, 15].

Случай неограниченных сверху входных данных. Пусть ЗК$_\infty$ — задача с матрицей, элементы которой независимые случайные величины, принимающие значения из области $[a_n, \infty)$, $a_n > 0$, согласно нормальному либо показательному распределению с величиной соответствующего параметра β_n. Алгоритм АИБ из работы [9] за время $O(n^2)$ дает решение ЗК$_\infty$ на минимум с оценками $\varepsilon_n = O\big((\beta_n/a_n)/(n/\ln n)\big)$ и $\delta_n = O(1/n)$ с условием асимптотической точности $\beta_n/a_n = o(n/\ln n)$.

Евклидова ЗК на максимум (ETSP$_{max}$). Известно, что ETSP$_{max}$ в пространстве $\mathbf{R^k}$ NP-трудна при $k \geq 3$. При $k = 2$ вопрос о сложностном статусе задачи остается открытым. Тем не менее, детерминированная ETSP$_{max}$ решается асимптотически точно за время $O(n^3)$ [16].

Задача m-PSP. В 1974 г. Краруп сформулировал задачу о m бродячих торговцах (m-Peripatetic Salesman Problem, далее m-PSP) [22]. В полном n-вершинном неориентированном графе $G = (V, E)$ с весовой функцией ребер $w : E \to \mathbf{R}_+$ требуется найти m непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов $H_1, \ldots, H_m \subset E$ с минимальной (максимальной) суммарной длиной $W(H_1) + \ldots + W(H_m)$. Через $W(H) = \sum_{e \in H} w(e)$ обозначена длина гамильтонова цикла H. При $m = 1$ имеем обычную задачу ЗК. Из работы [20] следует NP-трудность задачи при $m \geq 2$.

Первые результаты по построению приближенных алгоритмов с оценками для задачи 2-PSP на минимум (2-PSP$_{min}$) были получены в метрическом случае как с одинаковыми, так и с разными весовыми функциями искомых маршрутов [2].

2. Задача 2-PSP с общей весовой функцией

2.1. Метрическая 2-PSP$_{min}$: алгоритмы $A_{9/4}$ и A_2. Алгоритм $A_{9/4}$ трудоемкости $O(n^3)$ построен с использованием алгоритма $A_{3/2}$ [19] (Кристофидеса-Сердюкова, далее КС). Первый маршрут находится алгоритмом КС, а второй маршрут получается специальной перестройкой порядка следования вершин в первом маршруте [2]. Улучшенная оценка точности 2 достигнута в работе [17] на основе двух реберно непересекающихся остовных деревьев минимального веса. Время $O(n^2 \log n)$ работы алгоритма A_2 определяется трудоемкостью построения указанных деревьев [24].

2.2. Задача 2-PSP$_{min}[1, q]$ с расстояниями из отрезка $[1, q]$ в работе [6] решается за время $O(n^3)$ с точностью $(4 + q)/5$. Центральное место в доказательстве этого результата принадлежит следующему структурному свойству: *в n-вершинном 4-регулярном графе за время $O(n^2)$ можно найти пару реберно непересекающихся частичных туров с числом ребер не менее $8n/5$.*

2.3. Задача 2-PSP$_{min}\{1, 2\}$. В работе [18] установлена следующая связь между задачами на максимум и минимум: из полиномиального алгоритма A_ρ для задачи 2-PSP$_{max}$ следует полиномиальный алгоритм $A_{2-\rho}$ для задачи 2-PSP$_{min}\{1, 2\}$. Отсюда для задачи 2-PSP$_{min}\{1, 2\}$ имеем алгоритмы $A_{5/4}$ и $A_{11/9}$ с трудоемкостью $O(n^3)$, используя алгоритмы для 2-PSP$_{max}$ (из работ [1] и [13], соответственно). Алгоритм $A_{6/5}$ с улучшенной оценкой точности, представленный в [6], следует из пункта 2.2.

2.4. Задача 2-PSP$_{max}$: алгоритмы $A_{3/4}$ и $A_{7/9}$. В алгоритме $A_{3/4}$ [1] с трудоёмкостью $O(n^3)$ кубический (или "почти" кубический) подграф с максимальным суммарным весом разбивается на 2-сочетание и частичный тур, после чего подграфы

модифицирутся перегруппировкой своих ребер в два частичных тура, окончательно дополняемых до двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов.

Улучшенный алгоритм $A_{7/9}$ кубической трудоемкости [13] начинает свою работу с построения алгоритмом из [21] 4-регулярного подграфа G_4 максимального веса. Затем в G_4 отыскивается пара специальных реберно непересекающихся туров с достаточно большим числом ребер, после чего на их основе выделяются два тура с общим весом не менее (7/9) OPT и, наконец, путем дополнения их до реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, получаем искомое решение задачи.

2.5. Задача 2-PSP$_{max}[1,q]$ с расстояниями в интервале $[1,q]$. В работе [8] совместным использованием алгоритмов $A_{3/4}$ из [2] для 2-PSP$_{max}$ и основанного на работе [6] алгоритма $A_{5/(q+4)}$ для 2-PSP$_{min}[1,q]$, строится алгоритм $A_{(3q+2)/(4q+1)}$ для решения задачи 2-PSP$_{max}[1,q]$. Лучшая оценка точности дается алгоритмом $A_{(7q+3)/(9q+1)}$ из работы [13]. При $q=2$ эти алгоритмы дают оценки 8/9 и 17/19, соответственно.

3. Задача 2-PSP с двумя весовыми функциями

3.1. Метрическая 2-PSP$^{2w}_{min}$: алгоритм $A_{12/5}$. В алгоритме $A_{12/5}$ из [2] трудоемкости $O(n^3)$ сначала посредством алгоритма КС отыскиваются 3/2-приближенные решения H_1 и H_2 задачи TSP$_{\min}$ с весовыми функциями w_1 и w_2 соответственно. После этого второй гамильтонов цикл H_2 специальным образом трансформируется в гамильтонов цикл H_2', реберно непересекающийся с H_1. Затем роли графов H_1 и H_2 меняются, и в качестве приближенного решения задачи выбирается пара (H_1, H_2') или (H_1', H_2) минимального общего веса.

3.2. Задача 2-PSP$^{2w}_{min}\{1,2\}$ с весами ребер 1 и 2. Решение задачи можно получить с оценкой точности $(1+\rho'/2)$, где ρ' является гарантированной точностью для задачи TSP$_{min}\{1,2\}$ [6]. Поэтому, используя алгоритм с $\rho'=7/6$ из [23] для решения TSP$_{min}\{1,2\}$ имеем решение задачи 2-$PSP^{2w}_{min}\{1,2\}$ с суммарным весом не более (19/12) OPT. В работе [12] дан алгоритм $A_{7/5}$ с временной сложностью $O(n^3)$. В настоящее время лучшим по точности (но не по трудоемкости) является алгоритм $A_{4/3}$ с временной сложностью $O(n^5)$ [14]. Алгоритм использует технику зарядов, продуктивно применяемую для доказательства ряда структурных теорем в теории графов.

3.3. Задача 2-PSP$^{2w}_{max}\{1,2\}$. В работе [8] представлен алгоритм A_ρ с точностью $\rho=\frac{11\rho'-8}{18\rho'-15}$, зависящей от точности $\rho'\geq 1$ алгоритма $A_{\rho'}$ (для аналогичной задачи на минимум). Разные оценки точности $19/12 > 7/5 > 4/3$, упомянутые выше для задачи 2-PSP$^{2w}_{min}\{1,2\}$, соответствуют следующим оценкам точности ρ для задачи 2-PSP$^{2w}_{max}\{1,2\}$: $113/161 < 37/51 < 20/27$.

4. Задачи маршрутизации многих транспортных средств

4.1. Задача m-PSP$_{max}$ в многомерном евклидовом пространстве. В работах [3, 5] представлены асимптотически точные алгоритмы трудоемкости $O(n^3)$ для решения задачи m-PSP$_{max}$ (с детерминированными исходными данными) в случае отыскания двух и более реберно непересекающихся маршрутов коммивояжера. Сначала в графе G отыскивается максимальное (по весу) паросочетание M. Затем последовательное построение маршрутов осуществляется с использованием ребер паросочетания M, но только в качестве вспомогательного "строительного материала" так, что в отличие от алгоритма в [16] ни один из построенных маршрутов не содержит ребер M. Относительная погрешность получаемого решения равна величине порядка $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{2}{k+1}}$, где k-размерность пространства. Отсюда следует условие асимптотической точности алгоритма: $m=o(n)$.

4.2. Задача маршрутизации транспортных средств с ограниченным числом клиентов в маршруте (k-VRP). Множество клиентов, обслуживаемых транспортными средствами (ТС), представлено вершинами полного графа. Расстояния между клиентами и выделенной вершиной–депо, в которой изначально сосредоточены ТС, представлены ребрами графа. Каждый клиент обслуживается только одним ТС, которое начинает свой путь из депо, посещает (обслуживает) не более k клиентов и возвращается в депо. При этом минимизируется суммарная длина всех маршрутов.

Для задачи k-VRP с одним или несколькими депо в работе [10] представлены приближённые алгоритмы с временной сложностью $O(n^2)$ в предположении, что расстояния между вершинами — независимые одинаково распределенные случайные величины. Для усеченного нормального, экспоненциального, равномерного и мажорирующего распределений входных данных представлены условия асимптотической точности, верные как в случае неориентированных, так и ориентированных графов.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00093, 10-07-00195), целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б), а также грантом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (гос. контракт 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.А., Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 1, 2006. – Т. 12, № 2. – С. 11-20.

2. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Коркишко Н.М. Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 2, 2004. – Т. 11, № 1. – С. 11-25.

3. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 12-24.

4. Боровков А.А. К вероятностной постановке двух экономических задач // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 14. – Вып. 5. – С. 983-986.

5. Гимади Э.Х. Асимптотически точный алгоритм отыскания одного и двух реберно непересекающихся маршрутов коммивояжера максимального веса в евклидовых пространствах // Труды ИММ УрО РАН. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 23-32.

6. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2, 2007. – Т. 14, № 2. – С. 41-61.

7. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики – М: Наука, 1975. – № 31. – С. 35-42.

8. Гимади Э.Х., Ивонина Е.В. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. – Январь-февраль, 2012. – Т. 19, № 1. – С. 17-32.

9. Гимади Э.Х., Ле Галлу А., Шахшнейдер А.В. Вероятностный анализ одного алгоритма приближённого решения задачи коммивояжёра на неограниченных сверху входных данных // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, № 1. – С. 23-43.

10. Гимади Э.Х., Шахшнейдер А.В. Приближенные алгоритмы с оценками для задач маршрутизации на случайных входах с ограниченным числом клиентов в каждом маршруте // Автоматика и телемеханика. – 2012. – Вып. 2. – С. 126-140.
11. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. – 1974. – Вып. 12. – С. 35-45.
12. Глебов А.Н., Гордеева А.В., Замбалаева Д.Ж. Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Сибирские электронные математические известия. – 2011. – Т. 8. – С. 296-309.
13. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 4. – С. 17-48.
14. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Приближенный алгоритм решения задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 5. – С. 11-37.
15. Перепелица В.А., Гимади Э.Х. К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами // Дискретный анализ. – Новосибирск, 1969. – Вып. 15. – С. 57-65.
16. Сердюков А.И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). – Новосибирск, 1987. – Вып. 27. – С. 79-87.
17. Ageev A.A., Pyatkin A.V. A 2-approximation algorithm for the metric 2-peripatetic salesman problem // Lecture Notes in Comp. Science. – 2008. – Vol. 4927. – P. 103-115.
18. Baburin A.E., F. Della Croce, Gimadi E.K., Glazkov Y.V. and Paschos V.Th. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 157, № 9. – P. 1988-1992.
19. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Technical Report CS-93-13. – Carnegie Mellon University, 1976.
20. De Kort J.B. J.M. Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. – 1991. – Vol. 22, № 1. – P. 113-122.
21. Gabow H. N. An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. of the 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, April 25-27). – New York: ACM Press, 1983. – P. 448-456.
22. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). – Dordrecht: Reidel, 1975. – P. 173-178.
23. Papadimitriou C.H., Yannakakis M. The travelling salesman problem with distances One and Two // Math. Oper. Res. – 1993. – Vol. 18, №1. – P. 1-11.
24. Roskind J. and Tarjan R.E. A note on finding minimum-cost edge-disjoint spanning trees // Math. Oper. Res. – 1985. – Vol. 10, №4. – P. 701-708.
25. The Traveling Salesman Problem and its variations (ed. by A. Punnen and G. Gutin). Kluwer Academic Publishers. – Dortrecht/Boston/London, 2002.

© Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-24, факс (381) 333-25-98.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭВОЛЮЦИОННЫХ АЛГОРИТМАХ

А.В. Еремеев

Рассматриваются основные подходы к использованию классических методов дискретной оптимизации при построении эволюционных алгоритмов и приводится краткий обзор теоретических исследований таких эволюционных алгоритмов.

Введение. Эволюционные алгоритмы (ЭА), к числу которых относятся генетические алгоритмы (ГА) [10,18], эволюционные стратегии [22], алгоритмы генетического программирования [20] и др., берут начало в работах по эволюционному моделированию Л. Фогеля с соавт. [11] и Дж. Холланда [18], где было предложено моделировать процесс биологической эволюции с целью синтеза эффективных в некотором смысле структур и создания систем искусственного интеллекта. В нашей стране А.Г. Ивахненко и Л.А. Растригиным независимо были предложены методы группового учета аргументов [5] и случайного поиска [9], где также использовались идеи эволюции.

Характерной особенностью ЭА является имитация процесса эволюции биологической популяции, где *особи* соответствуют пробным точкам в пространстве решений X задачи оптимизации, а *приспособленность* особей к условиям окружающей среды определяется значениями целевой функции и штрафами за нарушение ограничений задачи, если такие имеются.

Принципы наследственности, изменчивости и отбора в эволюционных алгоритмах реализуются при построении новых решений-потомков посредством рандомизированных процедур (операторов), модифицирующих полученные ранее пробные точки подобно процессам мутации и кроссинговера в живой природе. Отбор таких пробных точек производится с учетом значений функции приспособленности (особям, имеющим преимущество по приспособленности даются бóльшие шансы на отбор в качестве родительских решений). Эволюционные алгоритмы могут применяться как для задач с одним критерием оптимизации, так и для многокритериальных задач, поэтому допускается и многокритериальная вектор-функция приспособленности. Приведем описание общего вида операторов ЭА и его схему. Здесь под оператором будем понимать рандомизированную процедуру, результат которой представляет собой случайную величину. Распределение последней может зависеть только от аргумента процедуры, номера итерации ЭА и исходных данных задачи.

Обозначим популяцию из N особей через $\Pi = (x^1, \ldots, x^N)$, а множество представленных в ней решений – через $\hat{\Pi}$, т. е. $\hat{\Pi} = \bigcup_{j=1}^{N} \{x^j\}$. Каждая новая популяция Π^{t+1} строится на основании текущей популяции Π^t с помощью следующих операторов (см., например, [3,24]).

Оператором *отбора* $\mathrm{Sel} : X^N \to X^{N'}$ извлекаются N' копий родительских решений из текущей популяции. Пусть промежуточная популяция $\Pi' = \mathrm{Sel}(\Pi^t)$, тогда $\hat{\Pi}' \subseteq \hat{\Pi}^t$.

Оператор *воспроизведения* $\mathrm{Rep} : X^{N'} \to X^{N''}$ вносит некоторые случайные изменения в родительские решения, создавая при этом N'' решений-потомков, составляющих промежуточную популяцию Π'' (соответствует мутации и кроссинговеру в живой природе и в ГА).

Оператором *выживания* $\mathrm{Surv} : X^N \times X^{N''} \to X^N$ определяются те решения из Π^t и их потомки из Π'', которые составят популяцию Π^{t+1}, т. е. $\widehat{\mathrm{Surv}}(\Pi^t, \Pi'') \subseteq \hat{\Pi}^t \cup \hat{\Pi}''$.

Оператор Init получает на вход только исходные данные задачи и вычисляет (детерминированным или случайным способом) начальную популяцию $\Pi^0 \in X^N$.

Работа ЭА начинается с популяции $\Pi^0 = \mathrm{Init}$ и продолжается итерациями следующей композиции операторов:

$$\Pi^{t+1} = \mathrm{Surv}(\mathrm{Rep}(\mathrm{Sel}(\Pi^t)), \Pi^t), \quad t = 1, 2, ...$$

Вычисления оканчиваются при выполнении некоторого правила остановки (например, по числу итераций или «качеству» полученных решений). Результатом работы ЭА является одно или несколько лучших по приспособленности решений, полученных за все время работы алгоритма. При теоретическом исследовании чаще всего рассматриваются ЭА без какого-либо правила остановки.

Ввиду простоты адаптации вычислительных схем эволюционных алгоритмов к различным задачам, эти методы активно применяются как в дискретной, так и в непрерывной оптимизации. ЭА имеют многочисленные приложения в управлении, планировании, проектировании, распознавании образов и в других областях (см., например, [1,3,8,10,14,15]).

С теоретической точки зрения естественно судить об эффективности ЭА по математическому ожиданию времени первого достижения оптимального решения и оценивать эту величину в худшем случае, как функцию от длины записи исходных данных задачи. Однако существование рандомизированных алгоритмов с полиномиально ограниченной средней трудоемкостью получения оптимума для NP-трудной задачи оптимизации противоречило бы предположению о неравенстве классов $\mathrm{NP} \neq \mathrm{RP}$, которое длительное время принимается в теории сложности в качестве рабочей гипотезы [19]. В связи с этим существование ЭА, обнаруживающего в среднем за полиномиальное время оптимальное решение какой-либо NP-трудной задачи, представляется маловероятным.

Попытки применения стандартных ЭА, таких как классический ГА [18], без учета специфики решаемых задач показали свою неперспективность. Однако гибкость вычислительных схем ЭА и возможности их комбинирования с другими алгоритмами позволили разработать достаточно конкурентоспособные гибридные ЭА.

Гибридные эволюционные алгоритмы. Один из наиболее ранних подходов к использованию классических методов дискретной оптимизации в эволюционных алгоритмах состоит в построении гибридных эволюционных алгоритмов, отдельные операторы которых представляют собой уже известные алгоритмы, такие как локальный поиск, жадный алгоритм, метод ветвей и границ или перебор L-классов (см., например, [1,7,8,15,17]). Гибридные ЭА зачастую показывают хорошие результаты на практике, а для некоторых из них удается и теоретически гарантировать нахождение оптимального решения благодаря свойствам используемого точного алгоритма [15,17]. Однако в большинстве случаев теоретическое обоснование работоспособности гибридных ЭА ограничивается применением теоремы о сходимости к оптимуму «почти наверное» (см., например, [24]), предъявляющей достаточно слабые требования к операторам ЭА, но не дающей каких-либо оценок сверху на время достижения оптимума.

Новым направлением исследований в рамках данного подхода является разработка эффективных алгоритмов решения задач оптимальной рекомбинации (ЗОР)

и исследование сложности этих задач. Пусть $X = \{0,1\}^n$, где n – размерность пространства решений. ЗОР при указанных двух допустимых родительских решениях $x^1, x^2 \in X$ состоит в отыскании допустимого решения-потомка x, доставляющего наилучшее значение целевой функции при условии, что для каждого $j = 1, \ldots, n$ выполняется $x_j = x_j^1$ или $x_j = x_j^2$. Генетические алгоритмы, в которых оператор кроссинговера вычисляет решение ЗОР, показали свою конкурентоспособность при решении задач о клике и независимом множестве в графе [12], задач теории расписаний [3,26], балансировки линии [14] и др.

Особый интерес представляют NP-трудные задачи, для которых ЗОР оказывается полиномиально разрешимой. Впервые такие задачи были обнаружены Э. Балашем и В. Нихаусом [12]. С использованием эффективных сводимостей задач оптимальной рекомбинации в [16] показано, что ЗОР полиномиально вычислима для задач упаковки множества наибольшего веса, разбиения множества минимального веса и для одного варианта простейшей задачи размещения производства. Там же предложен полиномиально вычислимый оператор оптимальной рекомбинации для задач булева линейного программирования, где в каждое ограничение входят не более двух переменных, что обобщает результат [12]. Кроме того, в [4] с ипользованием идей А.И. Сердюкова показано, что ЗОР для задачи поиска кратчайшего гамильтонова пути полиномиально вычислима для «почти всех» пар родительских решений.

Неявная реализация известных методов дискретной оптимизации в ЭА. Другой подход, возникший сравнительно недавно, направлен на теоретическое исследование вычислительных схем известных эволюционных алгоритмов при использовании достаточно простых (как правило линейных по трудоемкости) операторов мутации и кроссинговера [22]. Основным отличием данного подхода от предшествующих исследований эволюционных алгоритмов является ориентация на получение теоретических результатов в терминах среднего времени достижения оптимального решения или приближенного решения с заданной точностью.

Как выяснилось, базовые схемы эволюционных алгоритмов, таких как ГА с турнирной селекцией (см., например, [10]), многокритериальный эволюционный алгоритм SEMO [21] и эволюционная стратегия (1+1)-EA [9,23] при подходящем способе представления решений и соответствующих настройках параметров алгоритма могут неявно реализовывать известные методы дискретной оптимизации. Значимые результаты в данном направлении получены при анализе ЭА для таких классических полиномиально разрешимых задач дискретной оптимизации как задача о кратчайшем пути в графе, задача об остовном дереве минимального веса, задача о наибольшем паросочетании и задача о разрезе минимального веса. Показано [22], что оптимальные решения этих задач могут быть получены в среднем за полиномиальное время при помощи многокритериальных эволюционных алгоритмов. Интересно, что стандартные однокритериальные ЭА для многих из перечисленных задач имеют экспоненциальные нижние оценки трудоемкости в среднем (см. там же).

ГА зачастую относят к классу методов локального поиска, поэтому представляет интерес детальное изучение случаев, когда работоспособность ГА объясняется сходством его поведения с локальным поиском. В [2] изучены достаточные условия, при которых генетический алгоритм с турнирной селекцией впервые посещает локальный оптимум в среднем за полиномиальное время, и установлены значения парамет-

ров ГА, при которых на задачах с гарантированными локальными оптимумами [6] локальный оптимум достигается за полиномиальное время в среднем.

ЭА имеют общие черты с методом динамического программирования (ДП), если рассматривать состояния (частичные решения) в ДП как пробные точки в некотором расширенном пространстве решений. В [13] показано, что при достаточно широких предположениях задача, решаемая ДП за время T, может быть решена многокритериальным эволюционным алгоритмом SEMO в среднем за время $O(Tm \log |DP|)$, где m – число стадий ДП, а $|DP|$ – число состояний, вычисляемых за время работы ДП. При этом операторы ЭА имеют трудоемкость того же порядка, что и базовые операции ДП. Кроме того, для класса задач дискретной оптимизации, удовлетворяющих условиям существования вполне полиномиальной аппроксимационной схемы Г. Воигенгера [25], предложена вполне полиномиальная рандомизированная аппроксимационная схема, основанная на эволюционном алгоритме.

Заключение. Несмотря на то, что построение ЭА с существенно лучшей оценкой трудоемкости по сравнению с детерминированными методами представляется проблематичным, теоретические и экспериментальные исследования показывают, что широкие возможности адаптации ЭА позволяют успешно заимствовать в них идеи из классических методов оптимизации. Из рассмотренных результатов следует, что к эволюционным алгоритмам, наряду со сходимостью к оптимуму «почти наверное», естественно предъявлять новые требования в терминах среднего времени получения оптимального или приближенного решения требуемой точности.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00122 и 10–01–00598.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев А.В. Генетический алгоритм для задачи о покрытии // Дискр. анализ и исслед. операций. – Сер. 2, 2000. – Т. 7, № 1. – С. 47-60.
2. Еремеев А.В. Генетический алгоритм с турнирной селекцией как метод локального поиска // Дискр. анализ и исслед. операций. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 41-53.
3. Еремеев А.В., Коваленко Ю.В. О задаче составления расписаний с группировкой машин по технологиям // Дискр. анализ и исслед. операций. – 2011. – Т. 18, № 5. – С. 54-79.
4. Еремеев А.В., Коваленко Ю.В. О сложности оптимальной рекомбинации для одной задачи составления расписаний с переналадками // Дискр. анализ и исслед. операций, 2012 (в печати).
5. Ивахненко А.Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. – Киев: Техника, 1971.
6. Кочетов Ю.А. Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации // Журн. выч. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 5. – С. 788-807.
7. Кочетов Ю.А., Плясунов А.В. Генетический локальный поиск для задачи о разбиении графа на доли ограниченной мощности // Журн. выч. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, № 1. – С. 164-176.
8. Норенков И.П. Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации // Информ. технологии. – 1999. – № 1. – С. 2-7.
9. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. – М.: Наука, 1968.
10. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические

алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006.
11. Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. – М.: Мир, 1969.
12. Balas E., Niehaus W. Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // J. of Heur. – 1998. – Vol. 4, № 4. – P. 107-122.
13. Doerr B., Eremeev A., Neumann F., Theile M., Thyssen C. Evolutionary algorithms and dynamic programming // Theor. Comput. Sci. – 2011. – Vol. 412. – P. 6020-6035.
14. Dolgui A., Eremeev A., Guschinskaya O. MIP-based GRASP and genetic algorithm for balancing transfer lines // Matheuristics. Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming / Maniezzo, V., Stutzle, T. and Voss, S. (eds). – Berlin: Springer, 2010. – P. 189-208.
15. Dolgui A., Eremeev A.V., Sigaev V.S. HBBA: hybrid algorithm for buffer allocation in tandem production lines // J. of Intellig. Manufact. – 2007. – Vol. 18, № 3. – P. 411-420.
16. Eremeev A.V. On complexity of optimal recombination for binary representations of solutions // Evolut. Comput. – 2008. – Vol. 16, № 1. – P. 127-147.
17. Eremeev A.V., Kolokolov A.A. On some genetic and L-class enumeration algorithms in integer programming // Proc. of the 1st Intern. Conf. on Evolutionary Computation and its Applications. – Moscow, 1996. – P. 297-303.
18. Holland J.H. Adaptation in Natural and Artificial systems. – University of Michigan Press: Ann Arbor, MI, 1975.
19. Ko K. Some observations on the probabilistic algorithms and NP-hard problems // Inform. Proc. Lett. – 1982. – Vol. 14. – P. 39-43.
20. Koza J.R. Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs (Complex Adaptive Systems). – MIT Press, 1994.
21. Laumanns M., Thiele L., Zitzler E., Welzl E., Deb K. Running time analysis of multi-objective algorithms on a simple discrete optimization problem. // Proc. of the 7th Conf. PPSN, LNCS Series, Vol. 2439. – Berlin: Springer, 2002. – P. 44-53.
22 Neumann F., Witt C. Bioinspired Computation in Combinatorial Optimization – Algorithms and Their Computational Complexity. – Berlin: Springer, 2010.
23. Rechenberg I. Evolutionsstrategie: Optimerung Technischer Systeme nach Prinzipen der Biologischen Evolution. – Stuttgart: Formann-Holzboog Verlag, 1973.
24. Rudolph G. Finite markov chain results in evolutionary computation: A tour d'horizon // Fundamental Informaticae. – 1998. – Vol. 35, № 1-4. – P. 67-89.
25. Woeginger G.J. When does a dynamic programming formulation guarantee the existence of a fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)? // INFORMS J. on Comput. – 2000. – Vol. 12, Issue 1. – P. 57-74.
26. Yagiura M., Ibaraki T. The use of dynamic programming in genetic algorithms for permutation problems // Europ. J. of Oper. Res. – 1996. – Vol. 92. – P. 387-401.

© Еремеев Антон Валентинович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

СЕНСОРНЫЕ СЕТИ И ПОКРЫТИЕ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ ЭЛЛИПСАМИ

А.И. Ерзин

1. Введение

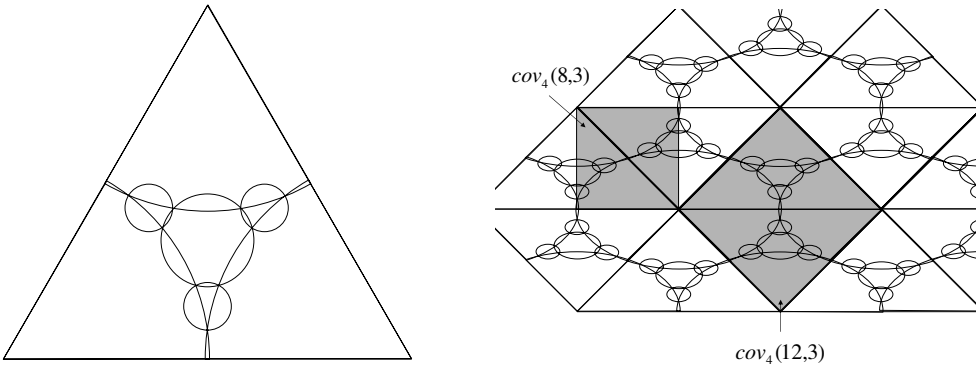
В беспроводных сенсорных сетях (БСС) зона действия сенсора часто имеет форму круга с центром в месте расположения сенсора и радиусом, равным дальности действия сенсора [1-3]. При этом считается, что сенсор *покрывает* этот круг, или, что круг является *зоной мониторинга* сенсора. Так как в БСС сенсор имеет ограниченный запас невозобновляемой энергии, и время его работы обратно пропорционально покрытой площади, то энергоэффективным покрытием плоской области считается покрытие минимальной плотности, где под плотностью D покрытия C плоской области площади S понимается отношение площадей элементов множества C к S.

Наиболее изученными покрытиями плоских областей являются, так называемые, *регулярные* покрытия [1,2], когда область разбивается на правильные многоугольники (*плитки*) и все плитки покрываются одинаково. В этом случае покрытие определяется покрытием *одной* плитки. В работе [2] введена классификация регулярных покрытий, согласно которой регулярное покрытие $cov_k(p,q)$ покрывает каждый правильный k-угольник используя p кругов q различных радиусов. Например, на рис. 1a изображен фрагмент покрытия $cov_3(7,3)$, в котором в вершинах правильного треугольника расположены центры одинаковых попарно пересекающихся кругов, непокрытый криволинейный треугольник в центре треугольника покрывается одним кругом меньшего радиуса и тремя одинаковыми кругами.

В данной работе рассмотрена задача наименее плотного регулярного покрытия плоскости, а также бесконечной полосы *эллипсами*. Это практически не изученная проблема, для которой нам удалось получить интересные новые результаты. Для удобства изложения мы сохранили обозначение покрытий $cov_k(p,q)$, но теперь k-угольник (плитка) не обязательно правильный, p — число эллипсов, участвующих в покрытии плитки, а q — количество разных типов эллипсов. Будем считать, что эллипс определяется полуосями, и эллипсы с одинаковыми полуосями будут считаться одинаковыми независимо от наклона их осей.

Из-за ограничений на объём мы не в состоянии представить всего разнообразия рассмотренных нами покрытий, поэтому ниже предлагаются вниманию наиболее перспективные по тем или иным показателям покрытия.

Отметим, что некоторые покрытия эллипсами можно получить из покрытий кругами применяя аффинное преобразование, которое сохраняет плотность покрытия. Например, на рис. 1a представлен фрагмент регулярного покрытия — покрытие правильного треугольника. Минимальная плотность этого покрытия приблизительно равна 1.0677 (это отдельный интересный результат, доказательство которого мы здесь опустим). После аффинного преобразования (вертикального сжатия) можно получить *прямоугольный* равнобедренный треугольник, который покрыт уже эллипсами. Плотность покрытия осталась прежней, а класс покрытия изменился. Причём, в зависимости от выбора плитки, получаются два класса регулярных покрытий $cov_4(12,3)$ и $cov_4(8,3)$ (см. рис. 1b). Используя аффинное преобразование, из известных покрытий кругами можно получить покрытия, принадлежащие другим классам, но плотность при этом не уменьшится. В связи с этим дальнейшие наши усилия были направлены на поиск новых (не получаемых с



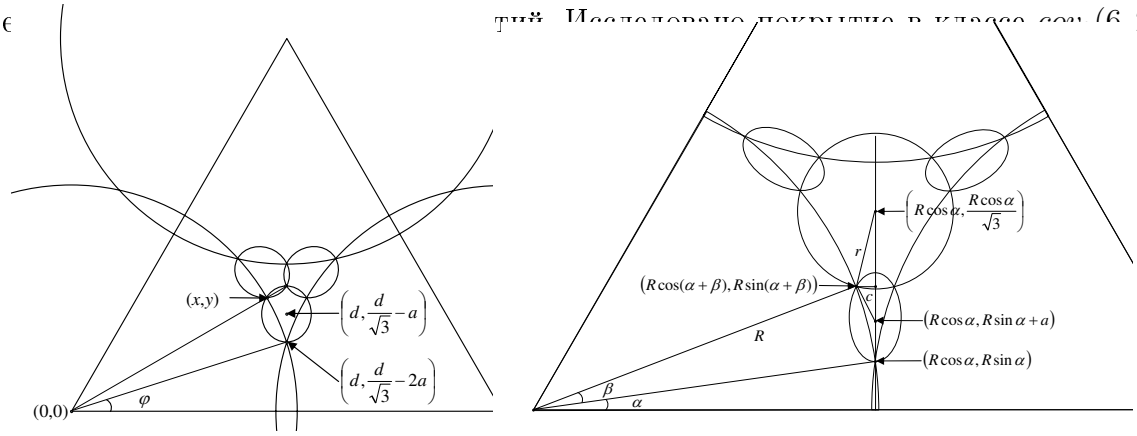
a) *b*)

Рис. 1: Регулярные покрытия: *a*) кругами $cov_3(7,3)$; *b*) эллипсами $cov_4(12,3)$ и $cov_4(8,3)$. Плотность покрытий $D \approx 1.0677$.

помощью аффинных преобразований) покрытий эллипсами меньшей (по сравнению с покрытиями кругами) плотности.

2. Покрытие эллипсами плоскости

В своей работе [4] Тот предложил покрытие плоскости с предельной плотностью 1.0189 кругами двух радиусов (покрытие $cov_3(\infty,2)$ в нашей классификации). Однако для покрытия одной плитки в его модели используется бесконечное число кругов малого радиуса. Несмотря на сильный результат, такое покрытие не применимо для БСС. Поэтому нами был рассмотрен целый ряд новых покрытий с *небольшим* числом эллипсов, участвующих в покрытии одной плитки. Ниже приводятся наиболе тий. Исследовано покрытие в классе $cov_3(6,2)$



a) *b*)

Рис. 2: *a*) Покрытие $cov_3(6,2)$, плотность $D \approx 1.0786$; *b*) Покрытие $cov_3(7,3)$, плотность $D \approx 1.056$.

(см. рис. 2a). Установлено, что его плотность

$$D(\varphi) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{3\left(\cos\varphi/\sqrt{3} - \sin\varphi\right)^2\left(\cos\varphi - \sqrt{3}/2\right)}{\sqrt{1-2\sin\varphi}\sqrt{2\cos\varphi/\sqrt{3}-1}}\right)$$

принимает минимальное значение близкое к 1.0786 при $\varphi \approx 0.3055 \approx \pi/10.2835$. Этот результат получен численно, т.к. аналитического решения построить не удаётся.

В классе $cov_3(7,3)$ построено покрытие (см. рис. 2b), плотность которого

$$D(\alpha,\beta) = \frac{\pi\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\left((\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta))^2 + \left(\cos\alpha/\sqrt{3} - \sin(\alpha+\beta)\right)^2\right)\right)}{6\cos^2\alpha} +$$

$$\frac{4\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\right)\left(\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\right)}{3\cos^2\alpha}.$$

Также численно удалось установить, что минимальная плотность такого покрытия равна приблизительно 1.056 при $\alpha \approx 0.247 \approx \pi/12.72$, $\beta \approx 0.163 \approx \pi/19.27$.

Применяя аффинное преобразование, получаем два регулярных покрытия из других классов той же плотности. А именно, покрытия $cov_4(8,4)$ и $cov_4(12,4)$ (рис. 3). Отметим, что при покрытии плоских областей кругами использование квадратной плитки всегда приводило к увеличению плотности по сравнению с аналогичными покрытиями, использующими треугольные плитки [2]. При покрытии же эллипсами можно добиться одинаковой плотности, хотя сложность покрытия (число фигур и их типов) квадратной плитки возрастает.

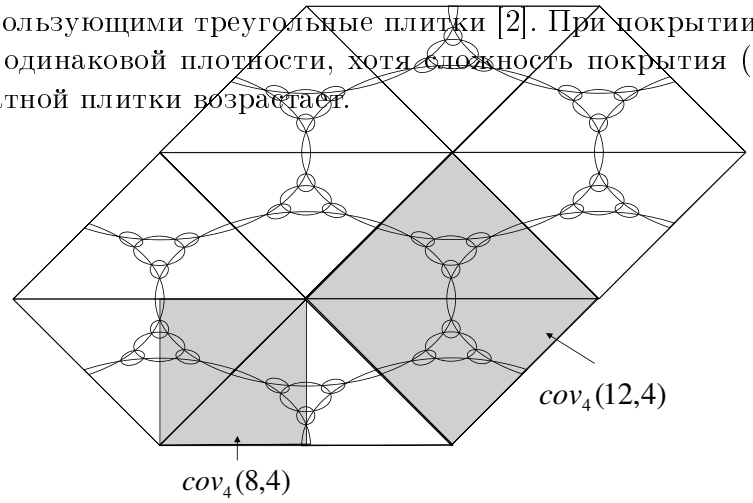


Рис. 3: Покрытия $cov_4(8,4)$ и $cov_4(12,4)$, плотность $D \approx 1.056$.

Более сложные модели регулярного покрытия плоскости эллипсами мы не приводим по двум причинам. Во-первых, они дают незначительное уменьшение плотности при существенном усложнении возникающей оптимизационной задачи. Во-вторых, из-за ограничений на объём.

3. Покрытие эллипсами полосы

В работе [3] мы назвали регулярное покрытие полосы кругами n-слойным, если центры всех кругов располагаются на n прямых, параллельным границам полосы. При этом в регулярном покрытии плиткой являлся не квадрат, а прямоугольник.

Будем и здесь придерживаться аналогичной классификации, используя выражение $P(n,q)$ для обозначения n-слойного покрытия эллипсами q различных типов.

Используя аффинное преобразование (а именно, сжатие/растяжение вдоль полосы) некоторые эллипсы можно превратить в окружности. Поэтому для упрощения анализа мы поступали именно так.

В первую очередь, были рассмотрены однослойные покрытия полосы эллипсами (класс $P(1,1)$). Оказалось, что в оптимальном покрытии длины вертикальных полуосей эллипсов равны $h/\sqrt{2}$, где h — ширина полосы, а длины горизонтальных полуосей могут принимать произвольные значения (в частном случае получалось покрытие полосы кругами). И плотность таких покрытий $\pi/2 \approx 1.57$.

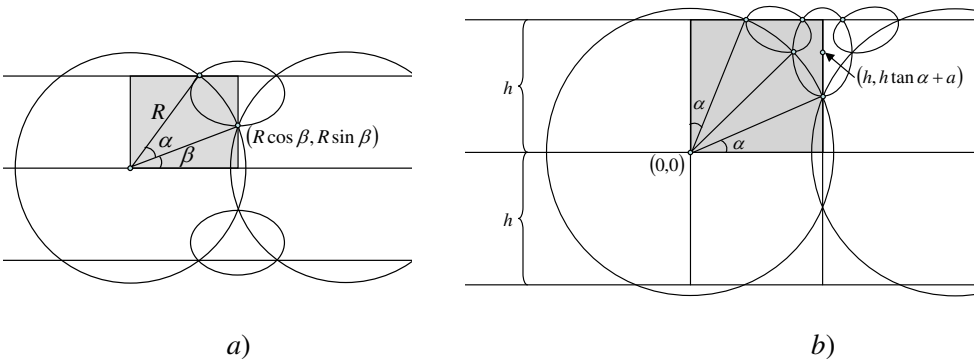


Рис. 4: a) Трёхслойное покрытие $P(3,2)$, плотность $D \approx 1.2615$; b) Пятислойное покрытие $P(5,3)$, плотность $D \approx 1.1639$.

Используя двухслойные покрытия, нам не удалось уменьшить плотность по сравнению с известными покрытиями кругами [3].

Среди трёхслойных покрытий отметим покрытие $P(3,2)$ (см. рис. 4a, где для упрощения выкладок большие эллипсы мы положили кругами), плотность которого выражается формулой

$$D(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{36\cos\beta}\frac{8\sqrt{3}(1-\cos\alpha)\sin(\alpha+2\beta)+9}{\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos(\alpha+2\beta))}+\sin\beta}.$$

Минимальная плотность предложенного покрытия $D(\alpha,\beta) \approx 1.2615$ достигается при $\alpha \approx 0.4808 \approx \pi/6.5339$ и $\beta \approx 0.545 \approx \pi/5.7642$. Для сравнения напомним, что аналогичное покрытие $P(3,2)$ кругами имеет плотность близкую к 1.294 [3].

Хорошего четырёхслойного покрытия, которое нельзя получить аффинным преобразованием из покрытия кругами, нам построить не удалось.

Пример пятислойного покрытия $P(5,3)$ с низкой плотностью показан на рис. 4b. В этом покрытии оси двух одинаковых эллипсов, покрывающих криволинейный треугольник около границы полосы, не параллельны границам полосы. Для выражения плотности покрытия через угол α и длину вертикальной полуоси центрального эллипса a (см. рис. 4b) мы воспользовались формулой $S_e = 4\pi S_t/\sqrt{27}$, которая связывает минимальную площадь эллипса S_e, проходящего через три точки, и площадь треугольника образованного этими точками S_t. Выражение для плотности $D(\alpha,a)$ получилось достаточно громоздким, и мы его опустим, заметив, что минимум $D(\alpha,a)$, равный приблизительно 1.1639, достигается при $\alpha \approx 0.4276 \approx \pi/7.3468$ и $a \approx 0.33h$. Напомним, что лучшее пятислойное покрытие полосы кругами $P(5,3)$

имело плотность больше 1.23, а плотность шестислойного покрытия кругами $P(6,3)$ приблизительно равна 1.204 [3].

4. Заключение

Покрытия плоских областей эллипсами практически не рассматривались ранее в научной литературе, и наши результаты, краткий список которых приведён выше, являются пионерскими. Отсутствие соответствующих публикаций объясняется, в частности, тем, что возникающие при минимизации плотности задачи достаточно сложны для решения. Невозможно найти не только аналитическое решение уже в простейших классах, но даже решить задачу численно. Это обусловлено нелинейностью функционалов и ограничений, а также многоэкстремальностью возникающих оптимизационных задач.

Важность же построения наименее плотных покрытий эллипсами объясняется, например, следующими соображениями. Допустим сенсор — это видеокамера, которая, находясь на некоторой высоте от земли, осуществляет мониторинг поверхности. Тогда покрытая сенсором область — это эллипс, и его вид зависит как от высоты, на которой находится камера, так и от фокуса и наклона объектива. То есть, зная оптимальное покрытие, несложно рассчитать значения упомянутых выше регулируемых параметров.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-92690-ИНД_а, а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu J., Yang S. Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Intern. J. of Foundat. of Comput. Sci. – 2005. – Vol. 6, № 1. – P. 3-17.
2. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытия плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 3-19.
3. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26-34.
4. Tóth F.G. Covering the Plane with Two Kinds of Circles // Discrete & Computational Geometry. – 1995. – Vol. 13, № 3. – P. 445-457.

© Ерзин Адиль Ильясович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-23, факс (383) 333-25-98.
E-mail: adilerzin@math.nsc.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОМПЛЕКТА СТРУКТУР ТЕСТОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Л.А. Заозерская, В.А. Планкова

В повышении эффективности процесса обучения важную роль играет совершенствование методов объективного контроля знаний, в том числе компьютерного тестирования. Одной из важных проблем при создании автоматизированных тестирующих систем является формирование тестов из базы имеющихся заданий, для решения которой в Омском филиале ИМ СО РАН и ОмГУ им. Ф.М. Достоевского предложен и развивается подход, основанный на применении моделей и алгоритмов дискретной оптимизации [1–6].

В соответствии с ним учебный курс рассматривается как *множество элементов знаний*, т.е. наиболее значимых понятий, свойств, утверждений и т.п. *Типовое тестовое задание* предназначено для проверки определенной совокупности элементов знаний указанного множества. Оно включает в себя как формулировку задания в общем виде, так и способы конструирования ответов. *Тестовое задание* является реализацией типового задания и при изменении данных сохраняет множество проверяемых им элементов знаний. Под *тестом* понимается система тестовых заданий. *Структуру* теста можно определить как набор типовых заданий, включенных в тест. *Размер* теста – это число заданий, составляющих его структуру. Под *оптимальной структурой теста* (ОСТ) понимается структура теста, выполнение которого позволяет сделать наиболее объективный вывод о степени усвоения обучаемыми рассматриваемой дисциплины и который удовлетворяет определенному критерию оптимальности.

В [1] предложена постановка задачи формирования ОСТ, в основе которой лежит разбиение множества элементов знаний на *базовое* (в него входят ключевые элементы дисциплины) множество и *дополнительное* (остальные элементы знаний). Задача формирования ОСТ поставлена как задача определения структуры теста фиксированного размера, который обеспечивает проверку знаний всех элементов базового множества и максимального числа элементов дополнительного множества. Построены соответствующие математические модели и получены ОСТ по теме "Линейное программирование" дисциплины "Экономико-математические методы" для студентов экономических специальностей вузов. Одна из этих структур положена в основу разработанной нами для указанного курса автоматизированной тестирующей системы EMM_TEST [1-3].

Постановка задачи формирования оптимального теста из набора заданий, в которой максимизируется суммарный вес входящих в него заданий при условии кратной проверки каждого элемента знаний, рассмотрена в [5]. Там же предложена соответствующая математическая модель, использованная для получения тестов по дисциплине "Информатика" для студентов гуманитарного направления.

Опыт применения системы EMM_TEST на заочном отделении экономического факультета ОмГУ им. Ф.М. Достоевского подтвердил значительное повышение качества и объективности проверки знаний при сокращении в несколько раз временных затрат преподавателя на подготовку и проведение итогового контроля. Однако при большом объеме учебного курса использование только одной структуры теста не обеспечивает в общем случае полноту проверки его содержания. В докладе [2] были намечены пути решения этой проблемы за счет формирования комплекта структур тестов, позволяющего объективно оценить полученные знания как отдельного испытуемого, так и усвоение всего материала учебного курса потоком студентов в целом.

Это необходимо для обеспечения преподавателю обратной связи и, следовательно, возможности обоснованной корректировки процесса обучения.

Для формирования такого комплекта можно построить итерационный процесс жадного типа на основе математической модели формирования ОСТ из [1]. Если количество тестов в полученном комплекте окажется достаточно большим, то в этом случае не будет обеспечена необходимая для получения объективного вывода частота проверки каждого элемента знаний из дополнительного множества. Пусть N_S – число студентов, участвующих в тестировании, а N_T – мощность комплекта структур тестов, в котором каждый элемент из дополнительного множества проверяется не менее d раз, тогда $\frac{d}{N_T}N_S$ – гарантированное число студентов, которые участвуют в проверке каждого элемента знаний из этого множества. Для повышения информативности результатов тестирования по всему курсу необходимо максимизировать величину $\frac{d}{N_T}N_S$, что эквивалентно минимизации мощности комплекта структур тестов при фиксированных значениях d и N_S.

В докладе предлагаются несколько постановок задачи формирования оптимального комплекта структур тестов. Рассмотрим одну из них, в которой требуется найти комплект минимальной мощности из структур тестов фиксированного размера. При этом все элементы из базового множества проверяются в каждой структуре комплекта, а любой элемент из дополнительного множества проверяется по крайней мере в заданном количестве структур этого комплекта.

Для описания математической модели введем следующие обозначения. Пусть $B = \{1, ..., m_1\}$ и $C = \{1, ..., m_2\}$ – множества номеров элементов базового ($\mathcal{B}$) и дополнительного ($\mathcal{C}$) множеств, а $\{1, ..., n\}$ – множество номеров разработанных тестовых заданий. Через $A = (a_{ij})_{m_1 \times n}$ обозначим матрицу инцидентности номеров заданий и элементов из B, где $a_{ij} = 1$, если j-ое задание предназначено для проверки i-го элемента из $\mathcal{B}$, и $a_{ij} = 0$ иначе; а через $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m_2 \times n}$ – матрицу инцидентности номеров заданий и элементов из C. Будем считать, что для числа структур тестов в формируемом комплекте задана верхняя граница T.

Введем переменные $z_t,\ x_{tj},\ y_{ti},\ t = 1, ..., T,\ j = 1, ..., n,\ i = 1, ..., m_2$, где $z_t = 1$, если структура с номером t сформирована, и $z_t = 0$ иначе; $x_{tj} = 1$, если j-ое задание включено в структуру t, и $x_{tj} = 0$ иначе; $y_{ti} = 1$, если i-ый элемент из $\mathcal{C}$ проверяется в структуре t, и $y_{ti} = 0$ иначе.

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\sum_{t=1}^{T} z_t \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{tj} = kz_t,\ t = 1, ..., T; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{tj} \geq z_t,\ t = 1, ..., T,\ i \in B; \tag{3}$$

$$y_{ti} \leq \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_{tj} \leq ky_{ti},\ t = 1, ..., T,\ i \in C; \tag{4}$$

$$\sum_{t=1}^{T} y_{ti} \geq d,\ i \in C; \tag{5}$$

$$z_t, x_{tj}, y_{ti} \in \{0,1\},\ t = 1,...,T,\ j = 1,...,n,\ i \in C. \quad (6)$$

Здесь целевая функция (1) минимизирует мощность формируемого комплекта структур тестов. Условия (2) описывают требования включения в структуру с номером t ровно k заданий, если она формируется, и в противном случае структура не содержит ни одного задания. Ограничения (3) обеспечивают проверку всех элементов базового множества в каждой сформированной структуре теста. Неравенства (4) гарантируют, что переменная y_{ti} равна единице тогда и только тогда, когда в t-ой структуре найдется хотя бы одно задание, проверяющее i-ый элемент из $\mathcal{C}$. Условия (5) обеспечивают проверку в оптимальном комплекте каждого элемента из дополнительного множества не менее d различными структурами.

В докладе для предложенных постановок задачи формирования оптимального комплекта структур тестов приводятся соответствующие математические модели и обсуждаются результаты их экспериментального исследования.

Работа поддержана грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Заозерская Л.А., Планкова В.А. Применение моделей дискретной оптимизации для разработки автоматизированной системы контроля знаний // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. – 2008. – Т. 6, Вып. 1. – С. 47-52.
2. Заозерская Л.А., Планкова В.А. Разработка и применение автоматизированной системы контроля знаний по экономико-математическим методам // Материалы IV Всероссийской конф. "Проблемы оптимизации и экономические приложения". – Омск, 2009. – С. 224.
3. Заозерская Л.А., Планкова В.А. Создание автоматизированной системы компьютерного тестирования с использованием дискретной оптимизации // Тез. науч.-метод. конф. "Новые информационные технологии в университетском образовании". – Новосибирск: ИЭПМ СО РАО, 2007. – С. 82-83.
4. Колоколов А.А., Заозерская Л.А., Планкова В.А. Об одной автоматизированной системе тестирования знаний студентов по экономико-математическим методам // Тез. докладов IV междунар. конф. по вопросам обучения с применением технологии e-learning. – М.: ООО "Global Conferences", 2010. – С. 130-133.
5. Колоколов А.А., Ларина Л.В. Разработка и применение моделей дискретной оптимизации при формировании тестов по информатике // Вестник Омского университета. – 2011. – № 2. – С. 173-175.
6. Колоколов А.А., Ларина Л.В. Формирование проверочных тестов по информатике с использованием дискретной оптимизации // Материалы XX Междунар. конф. "Применение новых технологий в образовании". – Троицк: МОО фонд новых технологий в образовании «Байтик», 2009. – С. 408-410.

© Заозерская Лидия Анатольевна, Планкова Валентина Александровна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru, plankova@ofim.oscsbras.ru

ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ НА АФФИННОЕ МНОЖЕСТВО

В.И. Зоркальцев

Многие задачи математического моделирования сводятся к геометрической проблеме поиска наименее удалённых от начала координат точек линейного многообразия (аффинного множества) в конечномерном пространстве. В качестве примеров в докладе рассматриваются задачи оценки параметров линейной регрессии, задачи регуляризации решений в балансовых моделях, задачи поиска псевдорешений в моделях с противоречивыми условиями.

Указанная геометрическая проблема возникает как составная часть некоторых вычислительных алгоритмов. В докладе она обсуждается применительно к решению систем нелинейных уравнений методом итеративной линеаризации и применительно к алгоритмам внутренних точек для решения задач линейного и нелинейного программирования.

Основная цель доклада состоит в изложении полученных ранее [1] и новых результатов, в исследовании свойств и взаимосвязей наименее удалённых от начала координат точек линейного многообразия при различных определениях понятия близости.

Рассмотрим некоторые из конкретизаций указанной геометрической проблемы. Пусть L – линейное многообразие в R^n, $J(x)$ – носитель вектора x из R^n (множество номеров его ненулевых компонент). Символ $\subset$ обозначает строгое включение. Множество векторов R^n со всеми положительными компонентами обозначим R^n_{++}. Выпуклую оболочку и замыкание множества X из R^n будем обозначать coX и clX.

1. Введём множество векторов линейного многообразия с минимальными носителями,

$$B = \{x \in L : \neg \ \exists y \in L, J(y) \subset J(x)\}.$$

Известно [1], что число векторов в B конечно и не превышает C_n^m, где m – размерность многообразия L.

2. Множество векторов линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент обозначим

$$Q = \{x \in L : \neg \ \exists y \in L, \ \sum |y_i| < \sum |x_i|, \ |y_i| \leq |x_i|, \quad i = 1, ..., n\}.$$

Ранее [1] было установлено, что выпуклая оболочка B является минимальным выпуклым множеством содержащим Q,

$$coQ = coB.$$

Согласно этому соотношению множество Q является ограниченным. В дополнение отметим, что множество Q может быть невыпуклым, но оно связное и является объединением конечного числа политопов.

3. Введём гёльдеровские, октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие. При заданном векторе весовых коэффициентов $h \in R^n_{++}$ и заданном степенном коэффициенте $p \in (1, \infty)$ для гёльдеровской нормы, получаем

$$y(p, h) = arg \ min\{\sum h_i |y_i|^p : y \in L\},$$

$$Y(1, h) = Arg \ min\{\sum h_i |y_i| : y \in L\},$$

$$y(\infty, h) = arg\ lex\ min\{max_i\ h_i|y_i| : y \in L\}.$$

Отметим, что при $p = 2$ гёльдеровская проекция является евклидовой проекцией.

Считаем, что чебышевская проекция $y(\infty, h)$ определяется в результате решения следующей многокритериальной задачи лексикографической оптимизации (что выражает символ lex). Определим вектор из L с минимальными значениями максимальных величин $h_i|y_i|$. Причем находим относительно внутреннюю точку решений данной задачи. Значения компонент вектора y, при которых достигается максимальное значение указанных величин (оно будет таковым при всех решениях данной задачи), фиксируем. Затем решаем задачу минимизации максимальных значений величин $h_i|y_i|$ на оставшихся переменных. Найдя относительно внутреннюю точку оптимальных решений этой задачи, дополнительно фиксируем на оптимальном уровне переменные y_i, на которых достигается оптимальное значение целевой функции задачи второго этапа. Если решение не единственное, повторяем процедуру. Через конечное число таких этапов вычислений получим единственное решение, которое и предлагается использовать в качестве чебышевской проекции начала координат на линейное многообразие L.

Множества всех октаэдрических, чебышевских, евклидовых проекций при разных весовых коэффициентах, а также множество всех гельдеровских проекций, обозначим соответственно

$$P_1 = \bigcup_{h \in R^n_{++}} Y(1,\ h),$$

$$P_\infty = \left\{y(\infty,\ h) :\ h \in R^n_{++}\right\},$$

$$P_2 = \left\{y(2,\ h) :\ h \in R^n_{++}\right\},$$

$$P = \left\{y(p,\ h) :\ h \in R^n_{++},\ p \in (1,\ \infty)\right\}.$$

Ранее были доказаны соотношения

$$P_2 = P, \quad clP_2 = Q.$$

Анонсируем следующие утверждения

$$Y(1, h) \cap B \neq \oslash, \forall\ h \in R^n_{++},$$

$$P_1 = Q,\ P_\infty = P_2.$$

Октаэдрические проекции при заданном векторе весовых коэффициентов h могут иметь не единственное значение. Причем согласно первому из приведенных соотношений среди октаэдрических проекций с заданным вектором весовых коэффициентов всегда существуют векторы многообразия с минимальным носителем.

Из приведённых соотношений, в частности, следует, что методом наименьших квадратов за счёт выбора вектора весовых коэффициентов можно получить любую гёльдеровскую и любую чебышевскую проекции точки на линейное многообразие, а также с любой заданной точностью можно получить любую октаэдрическую проекцию и любой вектор линейного многообразия с Парето-минимальными абсолютными значениями компонент, в том числе любой вектор из B.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. – Новосибирск: Наука, 1995.

© Зоркальцев Валерий Иванович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-88-27.
E-mail: zork@isem.sei.irk.ru

О НЕКОТОРЫХ ТРУДНОРЕШАЕМЫХ ЗАДАЧАХ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

А.В. Кельманов

Введение

Предмет исследования настоящей работы — дискретные экстремальные задачи поиска подмножеств векторов в конечном множестве векторов евклидова пространства, а также задачи поиска подпоследовательностей в векторных последовательностях, содержащих конечное число элементов. Цель доклада — обзор результатов, полученных в Институте математики СО РАН, по исследованию этих задач. К рассматриваемым задачам сводятся актуальные проблемы помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов, в том числе задачи эконометрики.

1. Задачи поиска подмножеств

Одной из самых известных [1] в общем случае NP-трудных [2] задач анализа данных и распознавания образов является

Задача MSSC (Minimum Sum-of-Squares Clustering). *Дано:* множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральное число $J > 1$. *Найти:* разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества (кластеры) $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_J$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} \|y - \overline{y}(\mathcal{C}_j)\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}_j) = \frac{1}{|\mathcal{C}_j|} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} y$, $j = 1, \ldots, J$, — центр j-го кластера.

К числу менее известных и слабо изученных задач относятся задачи, сформулированные ниже. Эти задачи близки к задаче MSSC в постановочном плане.

Задача J-MSSC-F. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральные числа $M_1, \ldots, M_J$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_J$ и $\mathcal{Y} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_J)$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} \|y - \overline{y}(\mathcal{C}_j)\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_J)} \|y\|^2 \to \min, \tag{1}$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}_j) = \frac{1}{|\mathcal{C}_j|} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} y$, $j = 1, \ldots, J$, при ограничениях $|\mathcal{C}_j| = M_j, j = 1, \ldots, J$, на мощности искомых подмножеств.

Задача J-MSSC-NF. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число J. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_J$ и $\mathcal{Y} \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_J)$ такое, что имеет место (1).

Отличие этих задач состоит в том, что в первой из них мощности искомых подмножеств фиксированы, а во второй эти мощности — оптимизируемые величины. Обе задачи отличаются от задачи MSSC тем, что в этих задачах центр одного из кластеров определять не требуется. Считается, что центр этого кластера совпадает с началом координат.

NP-трудность в сильном смысле этих задач была установлена в [3]. В алгоритмическом плане обе задачи слабо изучены: лишь для случая $J = 1$ построены алгоритмы с гарантированными оценками точности. В [4] было доказано, что задачи

на максимум, полиномиально эквивалентные задачам 1-MSSC-F и 1-MSSC-NF на минимум, разрешимы за время $\mathcal{O}(q^2N^{2q})$. Из этого результата следует, что при фиксированной размерности q пространства задачи 1-MSSC-F и 1-MSSC-NF также могут быть точно решены за полиномиальное время.

Кроме того, для задач, полиномиально эквивалентных задачам 1-MSSC-F и 1-MSSC-NF, были предложены: 1) точные псевдополиномиальные алгоритмы для случая, когда размерность пространства фиксирована, а компоненты векторов целочисленны [5], 2) FPTAS схемы для случая, когда размерность пространства фиксирована [6, 7]. Предложенные в указанных работах приближенные и асимптотически точные алгоритмы можно использовать для получения аналогичных решений задач 1-MSSC-F и 1-MSSC-NF. К сожалению, временная сложность предложенных алгоритмов зависит экспоненциально от размерности q пространства. Поэтому эти алгоритмы малопригодны для решения практических задач большой размерности.

В работах [8, 9] для задач 1-MSSC-F и 1-MSSC-NF обоснованы 2-приближенные алгоритмы, полиномиальные относительно N и q. Временная сложность этих алгоритмов есть величина $\mathcal{O}(qN^2)$. В [10] для задачи 1-MSSC-F предложена приближенная полиномиальная схема, позволяющая решать задачу с произвольной относительной погрешностью ε за время $\mathcal{O}(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$.

Недавно было установлено [11], что к числу труднорешаемых в сильном смысле относятся следующие задачи.

Задача VS2 (Vector Subset 2). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число $M > 1$. *Найти*: подмножество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 \to \min, \tag{2}$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{y\in\mathcal{C}} y$, при ограничении $|\mathcal{C}| = M$ на мощность искомого подмножества.

Задача VS3 (Vector Subset 3). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральное число $M > 1$. *Найти*: подмножество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \sum_{z \in \mathcal{C}} \|y - z\|^2 \to \min,$$

при ограничении $|\mathcal{C}| = M$ на мощность искомого подмножества.

Задача MSSC-Case. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число $M > 1$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на $J = N - M + 1$ непустых кластеров $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_J$ такое, что мощность одного из этих кластеров равна M и целевая функция задачи MSSC минимальна.

Задачи VS2 и VS3 полиномиально эквивалентны, а задача MSSC-Case эквивалентна задаче VS2. Эти задачи можно считать простейшими в широком спектре задач кластерного анализа. 2-приближенные полиномиальные алгоритмы для этих задач были предложены в [12]. Алгоритмы находят решение задач за время $\mathcal{O}(qN^2)$. В [13] обоснованы точные псевдополиномиальные алгоритмы для случая, когда размерность пространства фиксирована, а компоненты векторов имеют целочисленные значения. Временная сложность этих алгоритмов есть величина $\mathcal{O}(qN(2MB+1)^q)$, где B — максимальное абсолютное значение координаты векторов входного множества. Наконец, в [14] для задачи VS2 построена приближенная полиномиальная схема, обеспечивающая решение задачи с произвольной относительной погрешностью ε за время $\mathcal{O}(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$. Эта же схема может использоваться и для решения задач VS3 и MSSC-Case.

2. Задачи поиска подпоследовательностей

Сформулированные ниже задачи являются обобщениями задач, приведенных в п.1. Эти задачи возникают в связи с анализом и распознаванием многомерных временных рядов. Положим $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$.

Задача VSS2 (Vector Subsequence in a Sequence 2). *Дано*: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}, T_{\max}$ и $M > 1$. *Найти*: подмножество $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{M} \|y_{n_i} - \bar{y}(\mathcal{M})\|^2 \to \min, \tag{3}$$

где $\bar{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{n \in \mathcal{M}} y_n$, при ограничениях

$$T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max},\ m = 2, \ldots, M, \tag{4}$$

на элементы искомого подмножества $\mathcal{M}$.

Задача VSS3 (Vector Subsequence in a Sequence 3). *Дано*: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}, T_{\max}$ и $M > 1$. *Найти*: подмножество $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \|y_{n_i} - y_{n_j}\|^2 \to \min,$$

при ограничениях (4) на элементы искомого подмножества $\mathcal{M}$.

Задача MSSC-Case-S (Minimum Sum-of-Squares Clustering, special Case for a Sequence). *Дано*: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}, T_{\max}$ и $M > 1$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{N}$ на $J = N - M + 1$ непустых подмножеств $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J$ такое, что $|\mathcal{M}_1| = M$ и

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \|y_m - \overline{y}(\mathcal{M}_j)\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}_j) = \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} y_n$, $j = 1, \ldots, J$, $\mathcal{M}_1 = \{n_1, \ldots, n_M\}$, при ограничениях (4) на элементы подмножества $\mathcal{M}_1$.

Специальные случаи задач VSS2, VSS3 и MSSC-Case-S, когда $T_{\min} = 1$ и $T_{\max} = N - 1$ могут быть решены с помощью алгоритмов, предложенных для соответствующих задач VS2, VS3 и MSSC-Case поиска подмножеств. Об этих алгоритмах было сказано в п.1. Для общих случаев задач в [15] обоснованы 2-приближенные полиномиальные алгоритмы, позволяющие находить решение за время $\mathcal{O}(N^2(M(T_{\max} - T_{\min} + 1) + q))$. Для случая, когда компоненты векторов принимают целочисленные значения, в [16] предложены точные псевдополиномиальные алгоритмы, временная сложность которых есть величина $\mathcal{O}(N(M(T_{\max} - T_{\min} + 1) + q)(2MB + 1)^q)$, где B — максимальное абсолютное значение координаты векторов входной последовательности. Если размерность q пространства фиксирована, то алгоритмы псевдополиномиалены, так как $T_{\max} - T_{\min} + 1 \leq N$ и $M \leq N$. Все предложенные алгоритмы реализуют схему динамического программирования.

Задача J**-MSSCS-NF**. *Дано:* последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J$ и $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J)$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \|y_{n_m} - \overline{y}(\mathcal{M}_j)\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J)} \|y\|^2 \to \min, \tag{5}$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}_j) = \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \sum\limits_{n \in \mathcal{M}_j} y_n$, $\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J = \{n_1, \ldots, n_M\}$, при ограничениях (4) на элементы набора $\{n_1, \ldots, n_M\}$.

Задача J**-MSSCS-F**. *Дано:* последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$ и $M_1, \ldots, M_J$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J$ и $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J)$ такое, что имеет место (5) при условии, что $|\mathcal{M}_j| = M_j$, $j = 1, \ldots, J$, и при ограничениях (4) на элементы набора $\{n_1, \ldots, n_M\}$.

В настоящее время лишь для частных случаев задач 1-MSSCS-F и 1-MSSCS-NF поиска подпоследовательностей, когда $T_{\min} = 1$ и $T_{\max} = N-1$, построены алгоритмы с оценками точности — это алгоритмы, предложенные для решения соответствующих задач 1-MSSC-F и 1-MSSC-NF поиска подмножеств (см. п.1).

С теоретической точки зрения представляет интерес вопрос о сложностном статусе сформулированных выше задач в случаях, когда $T_{\min}$ и $T_{\max}$ не являются частью входа. В [17, 18] анализировались следующие аналоги сформулированных выше задач с натуральными параметрами $T_{\max} \geq T_{\min} \geq 1$: - J-MSSCS-NF$(T_{\min}, T_{\max})$, J-MSSCS-F$(T_{\min}, T_{\max})$, VSS2$(T_{\min}, T_{\max})$, VSS3$(T_{\min}, T_{\max})$, MSSC-Case-S$(T_{\min}, T_{\max})$. В указанных работах установлены условия, при которых эти задачи разрешимы за полиномиальное время.

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00090, № 10-07-00195, № 11-07-12083-офи-м, грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты № 7Б и № 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Anil K. Jain K. Data Clustering: 50 Years Beyond k-Means // Pattern Recognition Lett. – 2010. – Vol. 31. – P. 651-666.
2. Aloise D., Hansen P. On the Complexity of Minimum Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2007-50, 2007.
3. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, № 11. – С. 2059-2067.
4. Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А. О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножеств векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, № 6. – С. 11-19.
5. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Рыков И.А. Задача выбора подмножества векторов с целочисленными координатами в евклидовом пространстве с максимальной нормой суммы // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, № 4. – С. 31-43.

6. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 2, 2007. – Т. 14, № 1. – С. 32-42.
7. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, № 5. – С. 25-40.
8. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближенный алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2011. – Т. 18, №2. – С. 29-40.
9. Кельманов А.В., Хандеев В.И. 2-приближенный полиномиальный алгоритм для решения одной задачи кластерного анализа // (настоящий сборник).
10. Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи кластерного анализа // (настоящий сборник).
11. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2010. – Т. 17, № 5. – С. 37-45.
12. Кельманов А.В., Романченко С.М. Приближённый алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2011. – Т. 18, № 1. – С. 61-69.
13. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 156-162.
14. Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 92-100.
15. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. Приближённые алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций, 2012 (в печати).
16. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. Точные псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 2012 (в печати).
17. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач выбора подпоследовательности векторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 2012 (в печати).
18. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // (настоящий сборник).

© Кельманов Александр Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-79, факс (383) 332-25-98.
E-mail: kelm@math.nsc.ru

МАРШРУТИЗАЦИЯ В ЦЕХОВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

А.В. Кононов

В докладе содержится краткий обзор результатов по вычислительной сложности и аппроксимируемости цеховых задач открытого типа с маршрутизацией. На примере двух алгоритмов рассматриваются подходы к построению приближенных алгоритмов с гарантированной точностью получаемых решений.

Введение

Рассмотрим цеховую задачу открытого типа с маршрутизацией, которая является обобщением двух классических задач дискретной оптимизации: цеховой задачи открытого типа ($O||C_{\max}$) и метрической задачи коммивояжера (MTSP).

Задача $O||C_{\max}$

Задано множество машин $\boldsymbol{M} = \{M_1, \ldots, M_m\}$ и множество работ $\boldsymbol{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$, каждая из которых состоит из m операций по одной на каждой машине. Длительность операции O_{ji} работы J_j на машине M_i равна $p_{ji} \in Z^+$. Операции каждой работы могут выполняться в произвольном порядке. Никакие две машины не могут обрабатывать одну работу одновременно, и никакая машина не может выполнять одновременно более одной работы. Требуется найти расписание минимальной длины $C_{\max}$, где под длиной расписания понимается момент завершения выполнения последней по времени работы.

Если прерывания в процессе выполнения операций запрещены, то задача $O||C_{\max}$ является NP-трудной для фиксированного числа машин $m \geq 3$ [9] и NP-трудной в сильном смысле, если число машин является частью входа задачи [14].

Задача MTSP

Задан неориентированный полный граф $G = (V, E)$. Вес $\tau_{ij} \in Z^+$ ребра $e_{ij} = [v_i, v_j]$ определяет расстояние между вершинами v_i и v_j. Расстояния удовлетворяют неравенству треугольника. Требуется найти гамильтонов цикл R (обход) минимального веса $|R| = \sum_{e_{ij} \in R} \tau_{ij}$.

Задача MTSP является NP-трудной в сильном смысле [8].

Цеховая задача открытого типа с маршрутизацией

Рассмотрим задачу, которая является обобщением задач $O||C_{\max}$ и MTSP. Предположим, что работы расположены в узлах транспортной сети G и для выполнения работы J_j каждая машина должна переместиться в точку v_j. Изначально все машины расположены в одной вершине v_0 и должны вернуться в нее после выполнения всех работ. Все машины перемещаются с одинаковой скоростью и затрачивают на перемещение из вершины v_i в вершину v_j время τ_{ij}. Пусть s_{ik} и C_{ik} обозначают моменты начала и завершения выполнения операции O_{ik}, соответственно. Тогда, если машина M_k выполняет последовательно работы J_i и J_j, то выполнение работы J_j на машине M_k не может начаться ранее чем через время τ_{ij} после окончания машиной M_k работы J_i, то есть $s_{jk} \geq C_{ik} + \tau_{ij}$. Все машины могут начать движение или обслуживание работ с момента времени 0. Под длиной расписания $\tilde{C}_{\max}$ будем понимать длину временного интервала между моментом 0 и моментом времени, когда последняя машина вернется в вершину v_0 после выполнения всех работ. Требуется найти минимальное по длине расписание для перемещения машин и выполнения работ.

Согласно принятой $\alpha|\beta|\gamma$-системе обозначений для задач теории расписаний [11] обозначим сформулированную задачу как $RO||\tilde{C}_{\max}$ (или $ROm||\tilde{C}_{\max}$ для случая с m

фиксированными машинами). В поле β будем записывать следующие дополнительные ограничения на параметры задачи. Запись $pmtn$ означает, что в процессе выполнения работ разрешены прерывания. Запись $|V| = k$ означает, что число вершин в графе ограничено числом k. Запись $EasyTSP$ означает, что на заданной матрице расстояний задача коммивояжера разрешима за полиномиальное время.

Цеховые задачи открытого типа с маршрутизацией введены в работах Авербаха, Бермана и Черных [4, 5]. Задача $RO||\tilde{C}_{\max}$ является NP-трудной в сильном смысле, даже если работы требуется выполнить одной машиной или все работы лежат в одной вершине. В первом случае из задачи $RO||\tilde{C}_{\max}$ получается задача MTSP, во втором случае — задача $O||C_{\max}$. Более того, в [4] показано, что задача $RO2||V| = 2|\tilde{C}_{\max}$ с двумя машинами на двухвершинном графе NP-трудна в обычном смысле. В таблице 1 представлены известные результаты о сложности и аппроксимируемости цеховых задач открытого типа с маршрутизацией. В первой колонке указан тип рассматриваемой задачи. В случае, когда задача является полиномиально разрешимой, во второй колонке указывается трудоемкость алгоритма, находящего оптимальное решение, и третья колонка остается незаполненной. Если соответствующая задача является NP-трудной (NP-трудной в сильном смысле), то во второй колонке приведена запись NP-h. (NP-h.s.s.), и в третьей колонке указан наилучший известный ρ-приближенный алгоритм ее решения.

Таблица 1: Сложность и аппроксимируемость цеховых задач с маршрутизацией

$RO\|\|\tilde{C}_{\max}$	$NP-h.s.s.$ [8,14]	$O(\log m)$-прибл. алг.
$RO2\|\|\tilde{C}_{\max}$	$NP-h.s.s.$ [8]	13/8-прибл. алг. [6]
$RO2\|EasyTSP\|\tilde{C}_{\max}$	$NP-h.$ [5]	4/3-прибл. алг. [6]
$RO2\|\|V\| = 2\|\tilde{C}_{\max}$	$NP-h.$ [5]	$(1+\varepsilon)$-прибл. алг. (FPTAS) [1]
$RO\|\|V\| = 2\|\tilde{C}_{\max}$	$NP-h.s.s.$ [14]	7/2-прибл. алг.
$RO\|pmtn, \|V\| = 2\|\tilde{C}_{\max}$	$NP-h.s.s.$ [2]	2-прибл. алг.
$RO2\|pmtn, \|V\| = 2\|\tilde{C}_{\max}$	$O(n)$ [2]	

Основная часть доклада посвящена приближенным алгоритмам, представленным в таблице в строках 1 и 4. Приближенные алгоритмы в строках 5 и 6 основаны на адаптации алгоритмов для цеховых задач открытого типа к задаче с маршрутизацией и относятся к неопубликованным результатам автора.

В следующем разделе показано, как за псевдополиномиальное время найти точное решение задачи $RO2||V| = 2|\tilde{C}_{\max}$ и построить для нее вполне полиномиальную приближенную схему. Этот результат улучшает результат статьи [4], в которой для решения задачи $RO2||V| = 2|\tilde{C}_{\max}$ предложен 6/5-приближенный алгоритм. В [13] для задачи $RO||\tilde{C}_{\max}$ построен $O(\log m(\log\log m)^{1+\varepsilon})$-приближенный алгоритм. В разделе 2 для этой задачи представлен новый $O(\log m)$-приближенный алгоритм.

Длиной работы J_j называется общее время выполнения всех ее операций, то есть $d_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ji}$. Нагрузкой l_i машины M_i называется сумма длительностей всех операций, выполняемых на этой машине, $d_{\max} = \max_{J_j \in \mathcal{J}} d_j$, $l_{\max} = \max_i l_i$ и $\bar{C} = \max\{l_{max}, d_{max}\}$.

1. Две машины и две вершины

Пусть заданы множества работ $\boldsymbol{J}$, две машины A и B и транспортная сеть, состоящая из двух вершин v_0 и v_1. Пусть $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}_1$ множества работ, расположенных в вер-

шинах v_0 и v_1 соответственно. В момент времени 0 обе машины находятся в вершине v_0. Каждой машине требуется время τ для перемещения из одной вершины в другую. Требуется найти расписание минимальной длины. Пусть $d^0_{max} = \max_{J_j \in \mathcal{J}_0} d_j$ и $d^1_{max} = \max_{J_j \in \mathcal{J}_1} d_j$. Обозначим через p_{jA} и p_{jB} длительности работы $J_j \in \mathcal{J}$ на машинах A и B соответственно. Выберем из множества $\boldsymbol{J}$ работу, на которой достигается $\max\{\max\{p_{jA}|p_{jA} \le p_{jB}\}, \max\{p_{jB}|p_{jB} < p_{jA}\}\}$. Без ограничения общности предположим, что это работа J_1 и $p_{1A} = \max\{\max\{p_{jA}|p_{jA} \le p_{jB}\}, \max\{p_{jB}|p_{jB} < p_{jA}\}\}$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Для любого примера I задачи $RO2||V| = 2|\tilde{C}_{\max}$, в котором либо (i) $J_1 \in \mathcal{J}_0$, либо (ii) $J_1 \in \mathcal{J}_1$ и $d_1 \ge l_{max}$, длина оптимального расписания равна $\max\{l_{max} + 2\tau, d^0_{max}, d^1_{max}\}$, и оно может быть найдено за линейное от числа работ время.*

Назовем пример *трудным*, если $J_1 \in \mathcal{J}_1$ и $d_1 < l_{max}$. Расписание называется *каноническим*, если множество работ может быть разбито не более чем в восемь непересекающихся подмножеств, для которых выполнены следующие условия.
1. Все работы, принадлежащие одному подмножеству, расположены в одной вершине.
2. Все работы, принадлежащие одному подмножеству, выполняются блоком на каждой машине.
3. Все работы, принадлежащие одному подмножеству, выполняются либо сначала на машине A, потом на машине B, либо наоборот.
4. Машины A и B выполняют работы каждого подмножества в одном и том же порядке. Более того, этот порядок совпадает с порядком Джонсона для соответствующей цеховой задачи потокового типа на двух машинах.

В [1] показано, что для любого трудного примера существует каноническое оптимальное расписание. Более того, длина канонического расписания зависит только от разбиения исходного множества работ на непересекающиеся подмножества и может быть вычислена за полиномиальное от числа работ время. Используя свойства канонических расписаний, трудный пример задачи $RO2||V| = 2|\tilde{C}_{\max}$ может быть решен алгоритмом динамического программирования за время $O(n\Delta^{24})$, где $\Delta = \sum_{J_j \in \mathcal{J}} d_j$.

Используя стандартную технику округления [10], можно трансформировать алгоритм динамического программирования во вполне полиномиальную приближенную схему, то есть для фиксированного $\varepsilon > 0$ построить $(1+\varepsilon)$-приближенный алгоритм, время работы которого ограничено полиномом от числа работ и величины $\frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема 2. *Для задачи $RO2||V| = 2|\tilde{C}_{\max}$ существует вполне полиномиальная приближенная схема.*

2. Произвольное число машин и произвольная транспортная сеть

Сначала опишем построение $O(\log \bar{C})$ – приближенного алгоритма для задачи $RO||\tilde{C}_{\max}$.

На первом шаге, используя алгоритм Кристофидеса-Сердюкова [3,7], найдем в графе G обход T, длина которого не более, чем в полтора раза больше длины оптимального обхода. При этом обход T задает некоторый порядок π на множестве работ.

По исходному примеру I задачи $RO||\tilde{C}_{\max}$ построим пример I' цеховой задачи открытого типа $O||C_{\max}$ следующим образом. Множество работ в исходном примере заменим на не более чем $2m$ новых *комбинированных* работ. Каждая комбинированная работа объединяет несколько исходных работ, которые размещаются последовательно на некотором отрезке в обходе T. Работы, включенные в одну комбинированную работу, назовем ее компонентами. Время обработки комбинированной работы на каждой машине равно сумме времен обработки ее компонент на этой машине, при этом время перемещения машин между вершинами в расчет не принимается. Порядок π на множестве исходных работ порождает порядок π' на множестве комбинированных работ. Операции комбинированной работы будем называть A-операциями. Заметим, что для любого примера I задачи $RO||\tilde{C}_{\max}$ и произвольного обхода можно построить пример с $n' \leq 2m$ комбинированными работами, так что $p'_{ji} \leq d'_j \leq \bar{C}$ для всех $j = 1, \ldots, n'$ и $i = 1, \ldots, m$.

Затем в примере I' округлим время выполнения каждой A-операции вверх до ближайшей целой степени числа 2. Пусть p'_{max} будет длительность наибольшей A-операции в I'. В новом примере I'' число различных длин операций не превосходит $\lceil \log_2 p'_{max} \rceil$. Разобьем пример I'' на не более чем $\lceil \log_2 p'_{max} \rceil$ примеров, каждый из которых содержит все A-операции одинаковой длины.

Пусть I_k, $1 \leq k \leq \lceil \log_2 p'_{max} \rceil$ — один из таких примеров. Добавим в задачу ограничение, что все A-операции, которые выполняются на одной машине, должны выполняться в том порядке, в каком соответствующие им комбинированные работы появляются в последовательности π'. Поменяем ролями машины и работы, сохранив порядок на каждом множестве операций "новой" работы. В результате такого преобразования получим пример I'_k цеховой задачи рабочего типа с операциями единичной длительности. Для этой задачи известен алгоритм [12], строящий расписание σ' длиною не более $46,8\bar{C}$.

Далее по расписанию σ' построим допустимое частичное расписание σ примера I, то есть допустимое расписание для примера I задачи $RO||\tilde{C}_{\max}$ на соответствующем подмножестве исходных операций. Пусть A-операция некоторой комбинированной работы выполняется в некотором интервале в расписании σ'. Поместим операции компонент этой комбинированной работы в тот же интервал в порядке, в котором компоненты появляются в перестановке π. Повторим эту процедуру для всех A-операций в σ'. Затем сдвинем время начала каждой операции на длину пути в обходе T из вершины v_0 до вершины, в которой лежит работа, соответствующая этой операции. Получим допустимое частичное расписание σ примера I, длина которого не превышает $46.8\bar{C} + T$. Полное допустимое расписание $\bar{\sigma}$ для примера I построим склейкой всех частичных расписаний. Из $p'_{max} \leq \bar{C}$ следует, что длина расписания $\bar{\sigma}$ ограничена величиной $\lceil \log_2 \bar{C} \rceil (46.8\bar{C} + T)$.

Используя стандартную технику масштабирования, можно трансформировать пример I' так, что длительность каждой операции будет целым числом, не большим чем m, ухудшив при этом длину получаемого решения не более, чем в два раза.

Теорема 3. *Для задачи $RO||C_{\max}$ существует $O(\log m)$-приближенный алгоритм.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов А.В. О цеховой задаче открытого типа на двух машинах с маршрутизацией в двухвершинной сети // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012.

– Т. 19, № 2. – С. 54-74.
2. Пяткин А.В., Черных И.Д. Задача открытого типа с маршрутизацией и разрешением прерываний на двухвершинной сети // Дискретный анализ и исследование операций, принята в печать.
3. Сердюков А. О некоторых экстремальных обходах в графах // Управляемые системы: Сб. науч. тр., 1978. – № 17. – С. 76-79.
4. Averbakh I., Berman O., and Chernykh I. A $\frac{6}{5}$-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network // European J. of Operational Research. – 2005. – Vol. 166, № 1. – P. 3-24.
5. Averbakh I., Berman O., and Chernykh I. The Routing Open-Shop Problem on a Network: Complexity and Approximation // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 173, № 2. – P. 521-539.
6. Chernykh I., Dryuck N., Kononov A., and Sevastyanov S. The routing open-shop problem: New approximation algorithms // in: E. Bampis, K. Jansen (Eds.), the Proc. of WAOA 2009, in: Lecture Notes in Comp. Sci. – 2010. – Vol. 5893. – P. 75-85.
7. Christofides N. Worst-Case Analysis of a New Heuristic for the Travelling Salesman Problem // Report 388. – Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1976.
8. Garey M. and Johnson D. Computers and Intractability, A Guide to the theory of NP-completeness. W.H. Freemann and Company, San Francisco, CA, 1979.
9. Gonzalez T., Sahni S. Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1976. – Vol. 23. – P. 665-679.
10. Ibarra O. and Kim C.E. Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems Vehicle Scheduling on a Tree with Release and Handling Times // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1975. – Vol. 22. – P. 463-468.
11. Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., and Shmoys D.B. Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity // in *Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 4, Logistics of Production and Inventory*, ed. S. Graves, A.H.G. Rinnooy Kan, and P. Zipkin. North Holland, Amsterdam. – 1993. – P. 445-522.
12. Peis B. and Wiese A. Universal Packet Routing with Arbitrary Bandwidth and Transit Times // in: O. Günlük, G. Woeginger (Eds.), the Proceedings of IPCO 2011, in: *Lecture Notes in Comp. Sci.* – 2011. – Vol. 6655. – P. 362-375.
13. Yu W. and Zhang G. Improved approximation algorithms for routing shop scheduling // the Proceedings of of ISAAC 2011, in: *Lecture Notes in Comp. Sci.* – 2011. – Vol. 7074. – P. 30-39.
14. Williamson D.P., Hall L.A., Hoogeveen J.A., Hurkens C.A.J., Lenstra J.K., Sevastianov S.V., and Shmoys D.B. Short shop schedules // Oper. Res. – 1997. – V. 45, № 2. – P. 288-294.

© Кононов Александр Вениаминович,
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
E-mail: alvenko@math.nsc.ru

НОВЫЕ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ В РАЗМЕЩЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЙ

Ю.А. Кочетов

В простейшей задаче размещения предприятий заданы два конечных множества: J — множество клиентов и I — множество предприятий. Известны затраты на открытие каждого предприятия и обслуживание клиентов из каждого предприятия. Требуется найти непустое подмножество предприятий, которое дает минимальные суммарные затраты на открытие предприятий и обслуживание всех клиентов. Исследованию этой задачи посвящены десятки статей и монографий. Пик интереса к ней пришелся на 70–80 годы прошлого столетия. Так как задача является NP-трудной в сильном смысле и является обобщением задачи о покрытии, то интерес к ней, по-видимому, еще долго не угаснет. Тем не менее, "центр тяжести" исследований явно сместился в сторону новых, более подробных моделей, где всё больше внимания уделяется изучению поведения клиентов и вопросам конкурентной борьбы на рынках. В настоящем докладе будут представлены некоторые из наиболее интересных (по мнению автора) направлений исследований в этой бурно развивающейся области.

1. Поведение клиентов

В простейшей задаче размещения и подавляющем большинстве ее обобщений предполагается, что каждый клиент обслуживается одним предприятием. Оно выбирается исходя из минимизации затрат, или клиент сам выбирает поставщика согласно собственным предпочтениям. В любом случае предприятие получает "все или ничего". Такой принцип удобен при построении моделей, разработке численных методов, но не всегда адекватно отражает реальное поведение клиентов. В [3] представлены разные модели поведения клиентов. Остановимся на одной из них, соответствующей розничной торговле. Будем предполагать, что клиенты посещают все предприятия. Чем ближе предприятие (магазин), тем чаще его посещает клиент. Кроме расстояния, на поведение клиентов влияют и другие факторы: бренд, привлекательность, наличие парковки, развлечений для детей и проч. Клиент тратит деньги во всех открытых предприятиях, но в разных пропорциях. Пусть величины u_{ij}, задают *полезность* предприятия i для клиента j, а величины c_{ij} определяют доход предприятия i от обслуживания клиента j. Рассмотрим случай, когда открывается ровно p предприятий, а затраты на их открытие игнорируются. Будем считать, что вероятность посещения предприятия i клиентом j задается величиной $u_{ij}/\sum\limits_{l\in S} u_{lj}$, где S — множество открываемых предприятий, $|S| = p$. Тогда новая модель с распределенными закупками клиентов может быть представлена следующим образом: найти множество $S \subset I$ мощностью p, доставляющее максимум целевой функции

$$F(S) = \sum_{j\in J} \frac{\sum_{i\in S} u_{ij}c_{ij}}{\sum_{l\in S} u_{lj}}.$$

В [2] аналогичная задача называется *the gravity p-median problem*. Она является NP-трудной в сильном смысле и легко может быть представлена в терминах целочисленного линейного программирования. По сути, об этой задаче мало что известно. Возможность аппроксимации, сложность нахождения локальных экстремумов, точные методы, свойства многогранников и многие другие вопросы пока

остаются открытыми. Используя новую, вероятностную модель поведения клиентов, можно легко получить новые модели размещения (см., например, [7]).

2. Модели конкурентной борьбы

Работа Хотеллинга [6] по праву считается пионерской в области построения математических моделей конкурентной борьбы. В ней исследуются стратегии поведения двух игроков стремящихся захватить как можно большую долю рынка путем открытия собственных предприятий и выбора цен на их продукцию. Эти идеи получили свое развитие в работах Хакими [5] и др. Современный обзор в этой области можно найти, например, в [8]. Ниже будет представлена новая модель двухуровневого программирования, в которой используется вероятностные правила поведения клиентов и более подробно описывается функция полезности предприятий.

Пусть два игрока, Лидер и Конкурент, стремятся максимизировать свой доход, открывая свои предприятия и обслуживая клиентов. Первым открывает предприятия Лидер. Затем, зная это решение, открывает предприятия Конкурент. Будем предполагать, что открывая предприятие i, нужно еще выбрать его привлекательность A_j, которая влияет на функцию полезности каждого клиента. Для определенности будем считать, что $u_{ij} = A_i/(d_{ij}+1)$, где d_{ij} — расстояние от клиента j до предприятия i. Чем больше привлекательность и меньше расстояние, тем вероятнее посещение предприятия клиентом. Для каждого игрока известны следующие параметры:

B^L — бюджет Лидера,

B^F — бюджет Конкурента,

f_i^L — затраты на открытие предприятия i Лидером,

f_i^F — затраты на открытие предприятия i Конкурентом,

c_i^L — удельные затраты на повышение привлекательности предприятия i для Лидера,

c_i^F — аналогичная величина для Конкурента,

$\overline{A}_i^L$ — максимальная привлекательность предприятия i, если его открыл Лидер,

$\overline{A}_i^F$ — аналогичная величина для Конкурента,

w_j — бюджет клиента j.

Введем переменные задачи:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ открывается Лидером} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ открывается Конкурентом} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

A_i^L — привлекательность предприятия i, если его открывает Лидер,

A_i^F — привлекательность предприятия i, если его открывает Конкурент.

С использованием введенных обозначений получаем следующую задачу двухуровневого программирования:

$$\max_{x,A^L} \sum_{j\in J} w_j \frac{\sum_{i\in I} A_i^L/(d_{ij}+1)}{\sum_{i\in I} A_i^L/(d_{ij}+1) + \sum_{i\in I} A_i^*/(d_{ij}+1)}$$

при ограничениях

$$0 \le A_i^L \le \overline{A}_i^L x_i, \qquad i \in I;$$

$$\sum_{i\in I} \{f_i^L x_i + A_i^L c_i^L\} \le B^L;$$

$$x_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I;$$

где A_i^* — оптимальное решение задачи Конкурента:

$$\max_{y,A^F} \sum_{j\in J} w_j \frac{\sum_{i\in I} A_i^F/(d_{ij}+1)}{\sum_{i\in I} A_i^L/(d_{ij}+1) + \sum_{i\in I} A_i^F/(d_{ij}+1)}$$

при ограничениях

$$0 \le A_i^F \le \overline{A}_i^F y_i, \qquad i \in I;$$

$$\sum_{i\in I} \{f_i^F y_i + A_i^F c_i^F\} \le B^F;$$

$$y_i + x_i \le 1, \qquad i \in I;$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I.$$

В задаче Конкурента вектора x_i и A_i^L считаются известными. Как и в задаче об $(r|p)$-центроиде [5], сумма целевых функций Лидера и Конкурента является константой. Следовательно, отпадает необходимость в рассмотрении кооперативной и некооперативной версии этой задачи. Наличие нескольких оптимальных решений на нижнем уровне не меняет значение целевой функции на верхнем уровне. В [1] получены первые результаты исследований этой задачи для случая идентичных затрат для игроков при открытии предприятий и выбора их привлекательности, а также возможности открытия обоими игроками своих предприятий в одном и том же месте. В [9, 10, 12] исследовались близкие по смыслу модели, в которых предполагается наличие предприятий у Конкурента до выхода Лидера на рынок. В целом, можно с уверенностью заключить, что в настоящее время рождается новое направление в размещении производства, которое представляет несомненный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. Аналогичные работы ведутся и в области размещения предприятий на плоскости, когда множество I не является конечным, а представляется замкнутой ограниченной областью в R^2 [4, 11, 13, 14].

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00474.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетова Н.А. Альтернирующая эвристика для конкурентной задачи размещения с распределенными закупками // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: материалы конференции (см. данный выпуск).
2. Drezner T., Drezner Z. The gravity p-median model // European J. Oper. Res. – 2007.

– Vol. 179. – P. 1239-1251.
3. Drezner T., Eiselt H.A. Consumers in competitive location models // in: Z. Drezner, H.Hamacher (Eds.) Facility Location. Applications and Theory. – Berlin: Springer, 2004. – P. 151–178.
4. Fernández J. , Pelegrin B., Plastria F., Tóth B. Solving a Huff-like competitive lication and design model for profit maximization in the plane // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 179. – P. 1274-1287.
5. Hakimi S.L. Locations with spatial interactions: competitive locations and games // P. B. Mirchandani, R. L. Francis (Eds.) Discrete Location Theory. – Wiley & Sons, 1990. – P. 439-478.
6. Hotelling H. Stability in competition // Economic J. – 1929. – V. 39. – P. 41-57.
7. Aboolian R., Berman O., Krass D. Competitive facility location and design problem // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 182. – P. 40–62.
8. Kress D., Pesch E. Sequential competitive location on networks // European J. Oper. Res. – 2012. – Vol. 217, № 3. – P. 483-499.
9. Küçükaudin H., Aras N., Altinel I.K. Competitive facility location problem with attractiveness adjustment of the follower: A bilevel programming model and its solution // European J. Oper. Res. – 2011. – Vol. 208. – P. 206-220.
10. Küçükaudin H., Aras N., Altinel I.K. A leader-follower game in competitive facility location // Comput. and Oper. Res. – 2012. – Vol. 39. – P. 437-448.
11. Redondo J.L., Fernández J., García I. Heuristics for the facility location and design (1|1)-centroid problem on the plane //Computational Optimization and Applications. – 2010. – Vol. 45(1).
12. Saidani N., Chu F., Chen H. Competitive facility location and design with reactions of competitors already in the market // European J. Oper. Res. – 2012. – Vol. 219. – P. 9-17.
13. Sáiz M.E., Hendrix E.M.T., Fernández J., Pelegrín B.. On a branch-and-bound approach for a Huff-like Stackelberg location problem // OR Spectrum. – 2009. – Vol. 31. – P. 679-705.
14. Plastia F., Carrizosa E. Optimal location and sedign of a competitive facility // Math. Program., Ser A. – 2004. – Vol. 100. – P. 247-265.

© Кочетов Юрий Андреевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-89, факс (383) 333-25-98.
E-mail: jkochet@math.nsc.ru

ВИКИПЕДИЯ ПРОЦЕССОВ КАК КОЛЛЕКТИВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ. ИНФОРМАЦИОННЫЙ АСПЕКТ

С.А. Ломов, А.Х. Перез Чернов

Википедия (сетевая энциклопедия, в рамках которой возможно свободное редактирование) официально открылась в 2001 году. С 2003 по 2007 год количество статей в англоязычном сегменте википедии увеличилось с 125 тысяч до 2 миллионов. В настоящий момент ресурс содержит (по всем языкам) более 17 миллионов статей, в создании и правках которых приняло участие более 10 миллионов участников. По данным системы ранжирования сайтов Alexa[1], в настоящий момент википедия является шестым самым посещаемым ресурсом мира.

Легкость работы с википедией во многом обусловлена принципами постмодернизма, заложенными в ее основу. Правки текста можно вносить на любом этапе создания статьи (т.е. обеспечивается актуальность данных), любым автором (т.е. изменение и создание статей – коллективный процесс); контент версионируется (т.е. мы "помним" историю изменений содержания), допустимы ссылки на "еще не помещенные" в систему статьи (фактически, такие ссылки используются как пометки-приглашения на возможное расширение сети знаний), создание новой статьи упрощено до минимума (достаточно открыть несуществующую ссылку в рамках ресурса).

В настоящий момент википедия является общественным (в плохом и хорошем смыслах этого слова) хранилищем атомарных фрагментов знаний. Ей, впрочем, сложно играть роль обучающей системы из-за отсутствия "сквозных" текстов, предлагающих связывание статей в рамках заданных контекстов. Несмотря на наличие механизмов оценивания качества статей, википедия меньше направлена на поиск новых связей, создание новых знаний. Иными словами, она отлично фиксирует фрагменты уже верифицированных знаний, поступивших извне, и менее приспособлена к обратном процессу: кооперативному поиску и созданию новых знаний (связей) и их последующей проработке.

Безмасштабные сети (scale-free network) – известная математическая модель, описывающая структуру различных природных сетевых систем, начиная от молекулярной биологии и заканчивая социальными взаимодействиями. Для безмасштабных сетей известны алгоритмы их генерации, частотное распределение количества связей в узлах сети (распределение степеней вершин). Качественные свойства таких сетей – это самоорганизация, а также устойчивость к возможным разрушениям.

Для безмасштабных сетей известен так называемый феномен малого мира, означающий k-шаговую доступность почти любых двух элементов безмасштабной сети. Из-за того, что в сетях достаточной мощности указанное k обычно мало, феномен малого мира можно трактовать как коммуникационную компактность (т.е. скорость распространения сигнала по таким сетям сравнительно высока). Феномен малого мира продемонстрирован по отношению к различным операторам-отношениям связи элементов. А именно, в экспериментах Милграма [2] продемонстрирована 6-шаговая доступность элементов сети через оператор (ребро) "непосредственно знакомы", "писали совместную статью" и др.

Недавно показано [3], что википедия является самоорганизующейся устойчивой сетью текстов. Известные примеры социальных сетей демонстрировали ожидаемый факт: если социальные взаимоотношения в обществе биологических субъектов (людей) удовлетворяют условиям безмасштабности, то и виртуальная сеть "взаимоотношений" между цифровыми их представителями также обладает указанным свой-

ством. Случай с википедией интересен тем, что здесь безмасштабной становится сеть артефактов, произведенных ими.

Математическое моделирование применимо как для анализа структурных свойств википедии и принципов ее роста, так и для объяснения самого процесса возникновения текстов. Как отмечено выше, в википедии одна и та же статья может подвергаться многочисленным правкам различных авторов. При этом хранится история изменений. Модель рекомбинантных текстов [3] предлагает следующую математическую интерпретацию функционирования википедии: каждый автор – это геном (вносящий собственный стиль, качество, подход, интересы в тексты), каждый коллективно изменяемый текст – это фенотип, генотип которого суть набор авторов, принявших участие в правке текста. Функция целевого отбора – критики и читатели. Поэтому, написание википедии – это эволюционный алгоритм с нечеткой (биологической, human-based) функцией целевого отбора [4, 5]. Эволюционные алгоритмы и безмасштабные сети – интенсивно изучаемые разделы математики.

Социальные сети сложнее википедии из-за использования большого числа различных операторов (активностей) "вдоль" виртуальных связей. А именно, социальное окружение участника сети может оказаться чрезвычайно разнородным: одни "друзья" ценны экспертным мнением, другие – передачей близких по интересам информационных сообщений, к третьим сформировано доверительное отношение в каких-то других контекстах. Множественность контекстов (разнородность) использования операторов связей не позволяет некоторым социальным сетям оказаться по-настоящему успешными. Введение концепции "кругов" в таком неспецифичном социальном сервисе как Google+, возможно, было попыткой выстроить сбалансированное оперирование разными контекстами. В большинстве случаев четкое выделение "предпочитаемого" оператора помогает строить более эффективные сети и сервисы.

Рассмотрим задачу поиска экспортных возможностей. Заданы наборы внешних данных: географические территории, объемы рынков на них, интенсивность торговых и политических связей, тренды по возможным технологиям и развитиям экономик; и наборы внутренних данных: список мощностей и специализаций предприятий, скорость их развития, разрабатываемые торговые связи и исторические данные объемов поставок. Необходимо: построить "мягкую" модель, иллюстрирующую в заданных временных промежутках возможные развития и каждого предприятия, и их конгломерата в целом.

Сравнимой по сложности задачей является моделирование эволюции специальностей, специализаций, отдельных курсов в рамках ВУЗов страны. Задача определения оптимальных путей и сфер государственно-общественного и государственно-частного взаимодействия – находится в этом же классе проблем.

Парадоксален факт: каждая из этих задач на общегосударственном, системном уровне чрезвычайно сложна для моделирования, и, тем не менее, общество (не обращаясь к математическим моделям) сравнительно успешно решает эти задачи на практике. Попробуем выделить основные причины, почему те отдельные аналитические модели, которые, безусловно, просчитываются и на уровне отраслей, и в отдельных крупных организациях, сложно "продолжить" до всего общества.

Кооперационные модели. Традиционный подход к моделированию часто основывается на наблюдении за существующим поведением системы и построении функций, адекватно аппроксимирующих это взаимодействие в целом (рост народонаселения, рыночные равновесия, численность популяций типа "хищник-жертва" в водое-

ме). Построенные функции позволяют "заглядывать вперед" и узнавать в ближайшей перспективе значения целевых параметров [6]. Такой тип моделирования имеет серьезные преимущества: наглядность используемых математических формул (часто системы линейных дифференциальных уравнений невысоких порядков), а также наличие хорошо разработанных как символьных, так и численных методов нахождения их решений.

Другой подход к моделированию состоит в построении базовых правил функционирования каждого элемента системы и далее в (численном) получении "формулы состояния" системы как *кооперационного взаимодействия* ее элементов. Такой тип моделирования возник относительно недавно (метод конечных элементов, метод подвижных клеточных автоматов [7] и др.) и нашел успешное применение в моделировании физических взаимодействий смешанных сред, в социологическом прогнозировании.

Приведем возможные отличия аналитических и кооперационных моделей в рамках поставленных задач.

1) Используя традиционные аналитические модели можно хорошо описывать поведение в целом ("сверху"), однако сложнее получить конкретные рекомендации для индивидуальных участников. Метод "не замечает" неоднородности в структуре исследуемой системы. Кооперативные модели строятся, напротив, по взаимодействию локальных частей, поэтому лучше адаптируются к "масштабированию размера".

2) Традиционные модели хорошо описывают поведение системы, продолжающей находится в тех же, обычно стабильных, условиях функционирования. В случае же "ударных волновых воздействий" (паника, эпидемия, резкое изменение условий) как на всю систему, так и на ее отдельные части — свои положительные стороны проявляют модели, построенные на кооперационных принципах взаимодействия.

3) Возможность описания условий "равновесия" системы в терминах уравнений выбранных параметров (свойств) – сильная сторона традиционного аналитического моделирования. Актуальна задача снижения размерности описательной модели, т.е. минимизация числа "управляющих", "качественных" параметров. В процессе эволюции открытой системы возможна миграция управляющих параметров. Таким образом, если в традиционных аналитических моделях функция описания создается лишь однажды в процессе "наблюдений" за целевой системой и далее не изменяется, то в кооперативных моделях сама функция описания может становиться исследуемым (параметризированным) объектом.

Модели с активной памятью. Многие традиционные модели, сформулированные в терминах "динамических равновесий", осуществляют прогнозирование лишь на основе текущего состояния системы. В биологических и социальных системах, напротив, произошедшие с системой изменения накапливаются и передаются (коэволюция, вирусный перенос генов, рефлексы и ассоциативная память, культура). При повторяющемся выведении "стандартной модели" из состояния равновесия скорость ее обратной стабилизации окажется постоянной. Аналогичный опыт над реальными системами покажет, что "реакции на изменения" встраиваются в систему и могут "мультиплицироваться" на последующих витках. Кроме этого, сложные самоорганизующиеся системы характеризуются пульсацией своего развития (в терминах синергетики [8] это объясняется циклическим конкурированием режимов HS-размывания и LS-локализации). Таким образом, "активное" воздействие истории на развитие системы – необходимое свойство создаваемых моделей.

Мягкие модели. Мягкое моделирование [11] учитывает структурную устойчивость полученных результатов и нацелено на описание "топологически эквивалентных" классов возможных траекторий развитий системы. К мягкому моделированию примыкают направления нечетких высказываний, специальных логик, анализа данных [9]. Некоторые исследователи полагают [10], что механизмы мышления (самоорганизации, построения логик) несвойственны самой природе или человеку априорно и могут или должны быть выведены в результате самоорганизации структур, используемых в моделировании конкретной задачи. В качестве примера приведем динамическую логику [10], в рамках которой степень нечеткости высказываний в начале и в конце обучения различаются. Фактически делается попытка не подбирать математический аппарат заранее и извне (вероятностная логика, нечеткая логика, модели распознавания с заданными весовыми коэффициентами, эвристические алгоритмы), но "выращивать" его в рамках конкретного адаптивного развития самой модели и возникающих перед ней задач.

Итак, общество (как открытая биологическая система) работает кооперативно, при активном влиянии исторического опыта и с использованием нечетких, адаптивных, "экспертных" данных, правил и терминов. Поэтому будет уместным согласиться, что решение сложных экономических, образовательных, социальных задач – это скорее коалиционное, нечеткое творчество экспертов, чем "традиционный язык строгих правил и цифр". С другой стороны, развитый к настоящему моменту математический аппарат может попытаться объяснить, почему такой, на первый взгляд, далекий от формализации процесс все же находится в границах естественного развития социальных и биологических систем и допускает "соответствующее" моделирование.

Успех википедии подтверждает, что кооперация в создании очень больших и контекстно-разнородных сетей знаний при определенных условиях осуществима. Можно ли создать *википедию процессов*, чтобы группы людей могли 1) описывать и развивать процессы; 2) кооперативно взаимодействовать с помощью этой системы в реальных процессах (производственных, общественных научных, жизненных); 3) открывать новые процессы, находить взаимосвязи, оптимизировать их, строить новые эволюционные структуры, находящиеся "над" процессами.

Отметим, что локальные "экспертные" википедии процессов уже развиваются: некоторые компании пытаются сопоставить данные о клиенте и существующие "паттерны" покупок для последующего "соотнесение" клиента с тем или иным процессом. Это позволяет предугадать возможные потребности клиента и опередить другие магазины. Несколько праксеологических и инженерных комитетов работают над "метаязыком" для описаний организационных практик и процессов. Все это, на наш взгляд, говорит о том, что общественная кооперация [12] для интеграции процессов, публичных данных, соответствующего математического и вычислительного инструментариев, – актуальна. Подобную кооперацию можно осуществлять на основе существующих информационных технологий. Заявленные принципы мягкости, кооперативности, наличия активной памяти в реализуемых моделях можно считать требованиями, выдвигаемыми к такого рода информационным системам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexa Top Ranking [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://alexa.com/topsites – Дата доступа: 30.3.2012.
2. Travers, Jeffrey and Stanley Milgram. An Experimental Study of the Small World

Problem // Sociometry. – 1969. – Vol. 32, № 4. – P. 425-443.
3. Masucci A.P., Kalampokis A., Eguiluz V.M., Hernandez-Garcia E. Wikipedia information flow analysis reveals the scale-free architecture of the Semantic Space // PLoS ONE. – 2011. – Vol. 6, № 2. – e17333.
4. Allan M. Simple recombinant design for project textbender [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://zelea.com/project/textbender/d/approach-simplex-wide.xht. – Дата доступа: 30.3.2012.
5. Derrick Cheng C. and Kosorukoff A. Interactive one-max problem allows to compare the performance of interactive and human-based genetic algorithms // Genetic and Evolutionary Computation – GECCO, 2004: Proceedings. – Springer Verlag (LNCS 3102), 2004. – Vol. 1, № 1. – P. 983-993.
6. Ильин А.И. Планирование на предприятии. – Мн.: Новое знание, 2007.
7. Медведева М.В., Колосков В.А. Клеточно-нейронная среда самоорганизации мультипроцессорных систем // Научная сессия МИФИ. Сборник научных трудов. – М., 2002. – Ч.1: Нейроинформатика, 2002. – С.196-203.
8. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Наука, 1997.
9. Манжула В.Г., Федяшов Д.С. Нейронные сети Кохонена и нечеткие нейронные сети в интеллектуальном анализе данных // Фундаментальные исследования. – 2011. – № 4. – С. 108-115.
10. Перловский Л.И. К физической теории мышления: теория нейронных моделирующих полей // Нейроинформатика. – 2006. – Том 1, № 2.
11. Арнольд В.И. “Жёсткие” и “мягкие” математические модели. – М.: МЦНМО, 2000.
12. Мансур О. Логика коллективных действий. Общественные блага и теория групп. – М. ФЭИ, 1995.

© Ломов Сергей Александрович,
Департамент социальной политики и информационного обеспечения,
Постоянный Комитет Союзного государства,
ул. Варварка, 7, Москва, 103132, Россия, тел. (495) 6237722, факс (495) 6230087.
E-mail: slomov08@gmail.com

© Перез Чернов Александр Хуанович,
Белорусский государственный университет,
Независимости просп., 4, Минск, 220030, Беларусь, тел. (37517) 2845891.
E-mail: alex.pereztchernov@gmail.com

ПОЛИЭДРЫ, НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА И ГИГАБАЙТНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай

Всеобщая компьютеризация бизнес-процессов породила огромные объемы данных, предоставляющие большие потенциальные возможности для построения очень детальных экономико-математических моделей. Тем не менее лишь небольшая часть этих данных используется в целях принятия управляющих решений, на что есть множество технических, организационных и других причин.

Одна из этих причин заключается в сложностях работы с решением сверхбольших экономико-математических моделей. По сути дела в практических терминах даже отработанная методология линейного программирования для задач порядка 10^7 переменных, 10^6 ограничений представляет существенную проблему, выделяемую в класс huge-scale линейного программирования [1,2]. За отсутствием устоявшегося русского термина будем называть это направление ГЛП — гигабайтное линейное программирование, что, как представляется, и количественно отражает характерные размеры оптимизационных задач, находящиеся в пределах возможностей современной массовой вычислительной техники.

Источниками таких задач являются, например, многоиндексные транспортно-логистические проблемы, модели дорожного движения в крупных городах, многопродуктовые динамические производственные модели, проблемы маршрутизации телекоммуникационного трафика и пр. Большую известность приобрела, например, проблема ранжирования интернет страниц (Google problem), хотя и не рекордная по своему объему. Результаты, представленные в докладе, мотивированы в основном задачами моделирования городского трафика, однако к таким задачам проявлен значительный интерес и со стороны транспортно-логистического бизнеса. Как оказалось, работа с практическими моделями позволила обратить внимание на некоторые особенности ГЛП, apriori неочевидные. С математической точки зрения, мы рассматриваем классическое линейное программирование вида

$$\min_{Ax\le b, x\ge 0} cx = \min_{x\in X} cx = cx^\star \tag{1}$$

с той особенностью, что $\dim(x) \sim 10^7$ и количество ограничений (строк матрицы A имеет порядок 10^5-10^6. Второй особенностью задач такого масштаба является их высокая разреженность порядка 10^{-5}-10^{-6}, что, собственно говоря, и имеет решающее значение в попытках решить такие задачи. Плотные матрицы с количеством элементов порядка 10^{13} (ок. 100 Tb) пока еще за пределами возможностей современной вычислительной техники.

Разреженность может иметь структурированную форму (блочная диагональная, обобщенные верхние границы, сетевая структура и др.), что иногда позволяет создавать специализированные алгоритмы для задач большой размерности. Однако для сложных комплексных задач ГЛП определенная структура размывается и рассчитывать на какие-либо специализированные алгоритмы не приходится. Косвенным свидетельством этому являются рис. 1, где приведено распределение количества ненулевых элементов в строках ограничений в типовой задаче транспортно-логистического типа гигабайтного масштаба. Распределение ненулевых элементов достаточно размытое и соответствует скорее разреженным scale-free стохастическим графам. В связи с этим в докладе описаны описан подход, основанный на достаточно универсальных

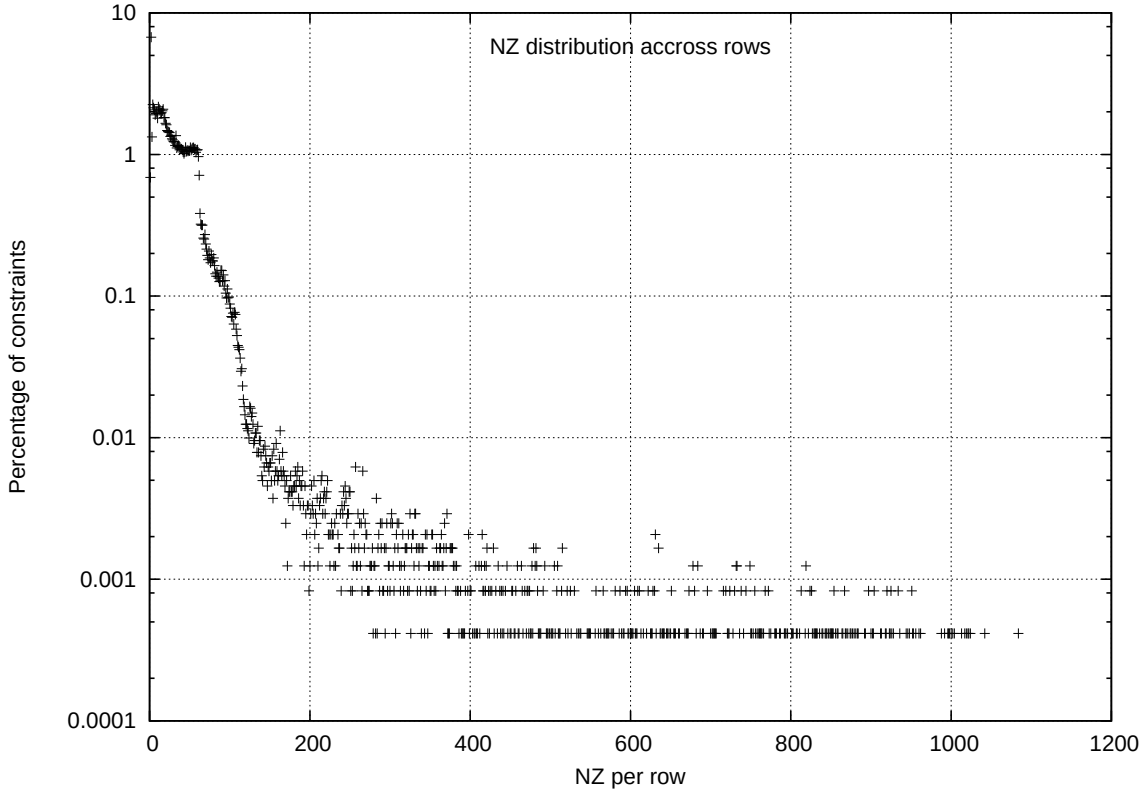


Рис. 1: Распределение ненулевых элементов по строкам

алгоритмах проективного типа, использующих неструктурированную разреженность и вытекающую из ней возможности декомпозиции.

Теоретическую основу для проективного подхода к решению задачи (1) представляет ее сведение к решению проективного уравнения

$$x = \Pi_X(x - \theta c), \tag{2}$$

где Π_X — оператор ортогональной проекции на множество $X = \{x : Ax \leq b\}$, константа $\theta > 0$. Привлекательность этого подхода заключается в том, что для достаточно большого θ достаточно однократного вычисления проективного оператора:

$$x^\star = \Pi_X(x^0 - \theta c) \tag{3}$$

для произвольного x^0. Константа θ зависит, конечно, от начальной точки x^0. Вычислению проекций на выпуклые многогранники посвящено множество работ, с которыми можно ознакомиться по более или менее современному, хотя уже и постепенно устаревающему обзору [3]. Интерес к проективным алгоритмам для решения задачи (1) связан еще со следующими обстоятельствами:

1. Универсальность. Эти алгоритмы с одной стороны слабо привязаны к структуре задачи, а с другой стороны при случае дают возможность ее эффективно использовать.

2. Простота вычислительных операций. Проективные алгоритмы опираются на хорошо разработанный аппарат вычислительной линейной алгебры.

3. Достаточно большой потенциал параллелизации, хотя и по поводу эффективности их применения имеются и различные мнения [4,5].

Представленный в работе подход основан на сведении задачи проекции (3) к проекции на политопы [6], которая также имеет значительный набор эффективных алгоритмов, начиная от работ [7,8] и заканчивая очень быстрым алгоритмом проектирования на симплексо-подобные многогранники [9]. В разреженных матрицах можно достаточно эффективно выделять симплексо-подобные подмножества ограничений, что с теоретико-графовой точки зрения сводится к задачам декомпозиции графа на независимые подмножества. Такая задача, хотя и является NP-сложной, но на практике жадные эвристики типа [10] оказываются вполне удовлетворительными.

В табл. 1 приведены усредненные данные при 10-кратном проектировании случайных точек на политопы, порожденные подмножествами структурно ортогональных строк ограничений прикладной задачи размерностью $130641 \times 3349864 \times 13929381$ (ограничений, переменных, ненулевых элементов) с плотностью ненулевых элементов $3.183\,10^{-5}$.

Таблица 1: Проекция на политопы, порожденные подмножествами структурно ортогональных строк ограничений прикладной задачи. Столбцы таблицы : m — количество векторов, n — размерность векторов, ρ — плотность ненулевых элементов, t — среднее время на 1 итерацию проектора, $iter$ — среднее количество итераций.

m	n	ρ	t	$iter$
3956	276657	$2.528\,10^{-4}$	1.3044	8.80
4648	219989	$2.151\,10^{-4}$	0.4220	8.40
5585	373285	$1.791\,10^{-4}$	2.0746	9.00
8104	367590	$1.234\,10^{-4}$	0.8558	9.30
12191	818397	$8.203\,10^{-5}$	6.5938	10.10
13426	791975	$7.448\,10^{-5}$	5.3685	10.40
23884	1472946	$4.187\,10^{-5}$	5.3756	10.60
30639	1687920	$3.264\,10^{-5}$	6.5454	11.10

При разложении исходной задачи на операции проектирования на независимые множества возникает вопрос о координации полученных решений. Перспективным направлением при этом представляется использование процесса [11], который основан на раздельном проектировании на независимые множества с последующей координацией получаемых решений, также основанной на проективной задаче. На рис. 2 представлена работа координационного алгоритма, где достаточно уверенно можно говорить о его линейной скорости сходимости. В данном случае решалась задача 130640x3349864x13929381, и по оси Oy отложена относительная точность получаемого приближения для вектора минимальной длины. На левом графике приведена (в логарифмической шкале) относительная точность, а на правом – ее аппроксимация линейной зависимостью от числа итераций. Полученные данные позволяют предположить, что при числе циклов порядка 100 будет достигнута достаточно приемлемая относительная точность порядка 10^{-4}.

Представленные в работе результаты хотя и обнадеживают, но все же имеют предварительный характер, и предстоит решить множество различных проблем до того, как можно будет говорить о полной практической применимости этого класса

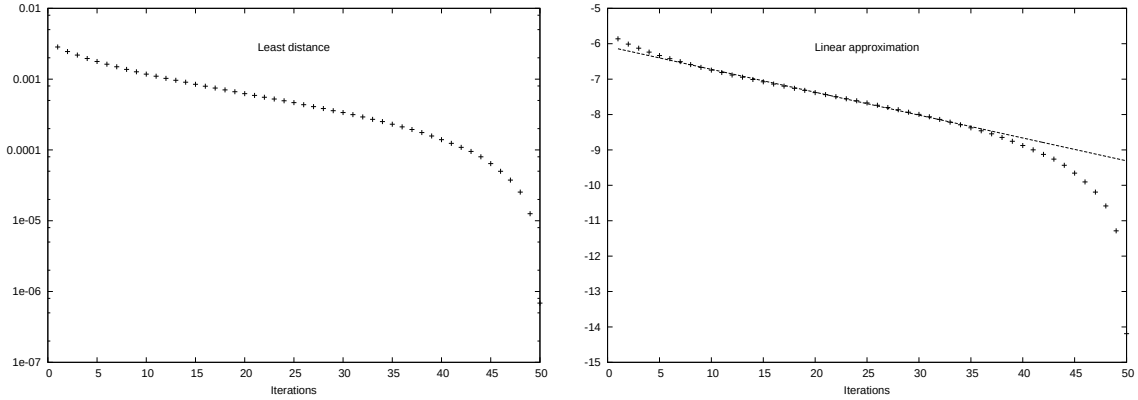


Рис. 2: Работа координационного алгоритма

алгоритмов. Вместе с тем, со стороны промышленности определенно наблюдается заинтересованность в такого сорта разработках, и нашей задачей является поиск адекватного ответа на этот вызов.

Работа частично поддержана проектами ДВО РАН 12-I-П18-04 (Программа Президиума РАН N 18), “Проективные алгоритмы и программное обеспечение для решения сверхбольших экстремальных и равновесных задач транспортного моделирования”, 12-III-A-01И-014 “Алгоритмы и программное обеспечение для решения полиэдральных выпуклых проективных задач”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nesterov Yu. Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems. – CORE Discussion paper, 2010/2, 2010. – 23 p.
2. Nesterov Yu. Subgradient methods for huge-scale optimization problems. – CORE Discussion paper, 2012/02, 2012. – 21 p.
3. Bauschke H.H., Borwein J.M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM. – 1996. – Rev. 38. – P. 367-426.
4. Gould N.I.M. How good are projection methods for convex feasibility problems? // Computational Optimization and Applications. – 2008. – Vol. 40. – P. 1-12.
5. Censor Y., Chen W., Combettes P.L., Davidi R., Herman G.T. On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints // Computational Optimization and Applications. – 2012. – Vol. 51. – P. 1065-1088.
6. Нурминский Е.А. Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, Вып. 3. – С. 387-396.
7. Hohenbalken von Balder A finite algorithm to maximize certain pseudoconcave functions on polytopes // Mathematical Programming. – 1975. – Vol. 8. – P. 189-206.
8. Wolfe P. Finding the Nearest Point in a Polytope // Mathematical Programming. – 1976. – Vol. 11. – P. 128–149.
9. Michelot C. A finite algorithm for finding the projection of a point onto the canonical simplex of R^n // J.Opt. Theory and Appl. – 1986. – V. 50, № 1. – P. 195-200.
10. Halldorsson M.M., Radhakrishnan J. Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs // Algorithmica. – 1997. – Vol. 18 (1). – P. 145–163.

11. Нурминский Е.А. Параллельный метод проекции на выпуклую оболочку семейства множеств // Известия вузов. – 2003. – Т. 11 (499). – С. 78-82.
12. Нурминский Е.А. Метод подходящих аффинных подпространств для решения задачи проекции на симплекс // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2005. – Т. 45, Вып. 11. – С. 1996-2004.

© Нурминский Евгений Алексеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Радио, 5, Владивосток, 696041, Россия, тел. (423) 213-04-04, факс (423) 231-04-52.
E-mail: nurmi@dvo.ru

© Шамрай Наталья Борисовна,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Радио, 5, Владивосток, 696041, Россия, тел. (423) 213-04-04, факс (423) 231-04-52.
E-mail: shamray@dvo.ru

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА ДЛЯ МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ

А.В. Панюков

Модель многоотраслевого планирования Неймана оказала большое влияние на теорию экономического роста и стимулировала развитие математической экономики [1]. Тем не менее, во многих публикациях модель Неймана описывается как невычислимая чисто теоретическая модель (например, [2]), а для практических результатов предлагается использовать модель Леонтьева, являющейся частным случаем модели Неймана. В то же время модель Неймана может быть применена не только для многоотраслевого планирования, но и для решения других задач, например, для оптимизации бюджета продаж при ценовой диверсификации [3]. Поэтому разработка численных методов для модели Неймана является актуальной. Авторами были разработаны эффективные численные методы нахождения положения равновесия, которые могут быть реализованы в программных средствах, использующих вычисления с плавающей точкой [4]. Данные методы основываются на теории игр и линейном программировании.

Общим положением равновесия в модели Неймана (A, B), где A и B – это заданные $n \times m$ матрицы затрат и выпуска с неотрицательными элементами $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots n,\ j = 1, 2, \ldots m$, является решение $(\lambda,\ x,\ w)$ системы билинейных неравенств и уравнений:

$$(A - \lambda B)\, x \leq 0,\ (x, e^m) = 1,\ x \geq 0, \tag{1}$$

$$(A - \lambda B)^T\, w \geq 0,\ (w, e^n) = 1,\ w \geq 0, \tag{2}$$

где $e^l \in \mathbf{R}^l,\ l \in \{m, n\}$ такой, что $(\forall i = 1, 2, \ldots, l)\ e^l_i = 1$. Из данного определения общего положения равновесия следует, что $\lambda \geq 0$.

Невырожденным положением равновесия является положение равновесия (λ, x, w), удовлетворяющее дополнительному условию $w^T A\, x > 0$.

В общем случае система (1)–(2) имеет не единственное решение. Поскольку число λ^{-1} интерпретируется как равновесный темп роста, который достигается за счет структуры интенсивностей процессов x и структуры равновесных цен на товары w, то для теории и практики наибольший интерес представляют частные положения равновесия с экстремальными значениями λ.

Обозначим λ^* максимальное λ, удовлетворяющее (1)-(2). Число λ^* называют числом Фробениуса, а соответствующие ему векторы x^* и w^* – прямым и двойственным векторами Фробениуса. Таким образом, положение равновесия (λ^*, x^*, w^*) является решением следующей задачи математического программирования

$$\begin{gathered}(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A,B)} \lambda, \\ D(A, B) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (A - \lambda B)x \leq 0, (A - \lambda B)^T w \geq 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \geq 0, w \geq 0, \lambda \geq 0 \end{array} \right\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Аналогично обозначим λ_* минимальное λ, удовлетворяющее (1)-(2). Число λ_* называют числом Неймана, а соответствующие ему векторы x_* и w_* – прямым и двойственным векторами Неймана. В дальнейшем под положением равновесия для модели Неймана подразумевается (λ^*, x^*, w^*).

Численные методы решения задачи (3) рассматриваются в [5]. Они основаны на нахождении корней неубывающей функции

$$u(\lambda) = \min_{x:\,(x,e^m)=1,\,x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\ldots n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \lambda b_{ij})\, x_j$$

или

$$v(\lambda) = \max_{w:\,(w,e^n)=1,\,w\geq 0} \quad \min_{j=1,2,\ldots m} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lambda b_{ij})\, w_i.$$

Если значение λ фиксировано, то значения функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ равны оптимальному значению взаимодвойственных задач линейного программирования

$$\min\left\{u \;:\; (A-\lambda B)\, x \leq u,\; (x, e^m) = 1,\; x \geq 0\right\}, \tag{4}$$

$$\max\left\{v \;:\; (A-\lambda B)^T\, w \geq v,\; (w, e^n) = 1,\; w \geq 0\right\}. \tag{5}$$

Когда значение λ близко к корням функций $u(\lambda),\ v(\lambda)\ \to 0$, задачи (4) и (5) становятся вырожденными из-за близости к нулю базисных переменных u и v в оптимальном базисном решении задач. Поэтому задачи (4) и (5) не могут быть решены традиционными методами на основе вычислений с плавающей точкой.

Далее представлены полученные авторами результаты по нахождению корней функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ с использованием методов матричных игр.

Теорема 1. *Пусть (A, B) – модель Неймана, и все элементы матрицы B положительны. Пусть Γ_C – матричная игра с платежной матрицей $C = [a_{ij}/b_{ij}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m)$, и пусть $\hat{\lambda}$ – значение игры Γ_C. Тогда число Неймана λ_* и число Фробениуса λ^* данной модели Неймана равны $\hat{\lambda}$.*

Теорема 2. *Пусть (A, B) – модель Неймана, и все элементы матрицы A положительны. Пусть Γ_C является матричной игрой с платежной матрицей $C = [b_{ij}/a_{ij}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\quad j = 1, 2, \ldots, m)$, и пусть $\hat{\mu}$ – значение игры Γ_C. Тогда число Неймана λ_* и число Фробениуса λ^* данной модели Неймана равны $1/\hat{\mu}$.*

Преобразование λ в переменную $\mu = 1/\lambda$ в систему (1)-(2) дает эквивалентную систему неравенств

$$(B - \mu A)\, x \geq 0,\; (x, e^m) = 1,\; x \geq 0, \tag{6}$$

$$(B - \mu A)^T\, w \leq 0,\; (w, e^n) = 1,\; w \geq 0. \tag{7}$$

Система (6)-(7) определяет общее положение равновесия для модели Неймана $(B^T,\ A^T)$. В соответствии с теоремой 1 установление положения равновесия для модели $(B^T,\ A^T)$ возможно только при единственном значении $\mu = \hat{\mu}$.

Это следует из взаимнооднозначного соответствия переменной λ и переменной $\mu = 1/\lambda$, при котором положение равновесия для модели (A, B) возможно при единственном значении $\lambda = 1\hat{/}\mu$.

Теорема 2 доказана.

В общем случае оптимальные смешанные стратегии игры Γ_C, т.е. векторы $(\hat{p}, \hat{x})$, не являются решением системы (1-2) при $\lambda = \hat{\lambda}$. Стоит отметить, что теорема 1 (теорема 2) применима для моделей Неймана, у которых матрица B (A) содержит только положительные элементы.

Если некоторые элементы матриц A и/или B равны нулю, возможен подход, основанный на решении последовательности матричных игр.

Теорема 3. *Пусть* Γ *– матричнавя игра с платежной матрицей* $(A-\lambda B)^T$, *и* x^*, w^* *– оптимальные смешанные стратегии первого и второго игрока, соответственно. Пусть* u^* *является значением игры* Γ. *Тогда* $(u^*,\ x^*)$ *и* $(u^*,\ w^*)$ *являются оптимальными решениям (4) и (5), соответственно.*

Таким образом, для решения задач (4)–(5) можно использовать алгоритм фиктивного разыгрывания, который является устойчивым к погрешностям округления, в отличие от симплекс-метода.

На практике численные значения элементов матриц затрат и выпуска для модели Неймана получают, используя статистические данные и экспертные оценки, поэтому может возникать неопределенность, которая зачастую является интервальной. Проблема нахождении положения равновесия в модели Неймана (A, B), если значения элементов матриц заданы только в виде интервалов, рассмотрена в [5, 6].

Интервальной назовем модель Неймана с интервальными матрицами затрат $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right]\right\}$ и выпуска $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{b_{ij}}, \overline{b_{ij}}\right]\right\}$, $i = (\overline{1,n})$, $j = (\overline{1,m})$, $\mathrm{mid}\mathbf{A} = (\underline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}})/\mathbf{2}$, $\mathrm{mid}\mathbf{B} = (\underline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{B}})/\mathbf{2}$. Ранее авторами была доказана следующая теорема, позволяющая определить интервал для числа Фробениуса через матрицы верхних и нижних границ [5].

Теорема 4. *Пусть тройка* $(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w})$ *является положением равновесия для модели Неймана* $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$*:*

$$(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})} \lambda,$$
$$D(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\underline{\mathbf{A}} - \lambda\overline{\mathbf{B}})x \le 0, (\underline{\mathbf{A}} - \lambda\overline{\mathbf{B}})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}, \tag{8}$$

а $(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w})$ *является положением равновесия для модели Неймана* $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})} \lambda,$$
$$D(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\overline{\mathbf{A}} - \lambda\underline{\mathbf{B}})x \le 0, (\overline{\mathbf{A}} - \lambda\underline{\mathbf{B}})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}, \tag{9}$$

тогда для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$*:* $(\tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B})$*,*

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda,$$
$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\tilde{A} - \lambda\tilde{B})x \le 0, (\tilde{A} - \lambda\tilde{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \ge 0, w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}, \tag{10}$$

её число Фробениуса $\tilde{\lambda}$ *принадлежит интервалу* $[\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$.

Также было рассмотрено влияние мультипликативной неопределенности на положение равновесия [6].

Теорема 5. (λ^*, x^*, w^*) *является положением равновесия модели Неймана* $(\mathrm{mid}\ \mathbf{A}, \mathrm{mid}\ \mathbf{B})$

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{mid}\ \mathbf{A}, \mathrm{mid}\ \mathbf{B})} \lambda,$$
$$D(\mathrm{mid}\ \mathbf{A}, \mathrm{mid}\ \mathbf{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{c} (\mathrm{mid}\ \mathbf{A} - \lambda \mathrm{mid}\ \mathbf{B})x \le 0, \\ (\mathrm{mid}\ \mathbf{A} - \lambda \mathrm{mid}\ \mathbf{B})^T w \ge 0, \\ (x, e^m) = 1, (w, e^n) = 1, x \ge 0, \\ w \ge 0, \lambda \ge 0 \end{array} \right\}, \tag{11}$$

то для любой точечной модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\left(\tilde{A} = \beta_1 \mathrm{mid}\, \mathbf{A},\ \tilde{B} = \beta_2 \mathrm{mid}\, \mathbf{B}\right)$ *тройка* $(\lambda^* \beta_1/\beta_2,\ x^*,\ w^*)$ *является положением равновесия.*

Таким образом, в случае мультипликативной неопределенности остаются постоянными прямой и двойственный вектора Фробениуса, изменяется только число Фробениуса. Однако устойчивость прямого и двойственного векторов Фробениуса может наблюдаться и при более общей интервальной неопределенности.

Пример. Модель (A, B) размера 2×2, элементы матриц которой удовлетворяют ограничениям

$$a_{21} + a_{22} \leq \lambda^*(b_{21} + b_{22}); a_{11} = b_{11};\ \ a_{12} = b_{12};$$

имеет положение равновесия $\{\lambda^*, (x^*)^T{=}(0,5; 0,5), (w^*)^T = (1; 0)\}$.

Пример показывает, что существуют диапазоны значений для элементов матриц, при которых прямой и двойственный векторы Фробениуса $(x^*,\ w^*)$ не будут меняться. В связи с этим можно ввести понятия сильного и слабого решений [7].

Сильным решением для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем пару векторов (x_s, w_s) такую, что для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}) : \tilde{A} \in \mathbf{A}, \tilde{B} \in \mathbf{B}$, существует положение равновесия $(\tilde{\lambda}, x_s, w_s)$.

Наличие слабого решения обеспечивает допустимость ограничений (1)-(2) для интервальной модели $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Слабым решением для интервальной модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем пару векторов (x', w') такую, что для любой точечной модели Неймана для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B}) :\ \ \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$, выполняются ограничения

$$\begin{cases} (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0;\ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0; \\ (x', e^m) = 1;\ \ (w', e^n) = 1;\ \ x', w', \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Следующее утверждение позволяет проверить, является ли пара векторов (x, w) слабым решением.

Теорема 6. *Если для пары векторов* (x'', w'') *разрешима система ограничений:*

$$\begin{cases} (\overline{\mathbf{A}} - \underline{\lambda}\, \underline{\mathbf{B}})x'' \leq 0;\ \ (\underline{\mathbf{A}} - \overline{\lambda}\, \overline{\mathbf{B}})^T w'' \geq 0; \\ (x'', e^m) = 1;\ \ (w'', e^n) = 1;\ \ x'', w'' > 0; \end{cases}$$

то (x'', w'') *является слабым решением интервальной модели Неймана* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Если для модели $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ существует слабое решение, то его можно использовать для оценки числа Фробениуса λ'.

Теорема 7. *Пусть* $(x',\ w')$ *– слабое решение интервальной модели Неймана* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. *Если для точечной модели Неймана* $(\tilde{A}, \tilde{B}) :\ \ \tilde{A} \in \mathbf{A},\ \tilde{B} \in \mathbf{B}$,

$$\lambda' = \max\{\lambda |\ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})x' \leq 0;\ \ (\tilde{A} - \lambda \tilde{B})^T w' \geq 0\},$$

то $\lambda' \in [\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$, *где* $\underline{\lambda}$ *– число Неймана для модели* $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$.

В следующей теореме используется другой подход к оценке числа Фробениуса.

Теорема 8. *Пусть* (x^*, w^*) *– прямой и двойственный векторы Фробениуса для двух точечных моделей Неймана* $(\breve{A}, \breve{B})$ *и* $(\hat{A}, \hat{B})$ *таких, что* $\hat{a}_{ij} - \breve{a}_{ij} = \Delta a_{ij} \geq 0$, $\hat{b}_{ij} - \breve{b}_{ij} = \Delta b_{ij} \geq 0$. *Пусть число Фробениуса модели* $(\breve{A}, \breve{B})$ *равно* $\breve{\lambda}$, *а для модели* $(\hat{A}, \hat{B})$ *оно равно* $\hat{\lambda}$, $\Delta\lambda = \hat{\lambda} - \breve{\lambda}$. *Тогда если для модели* $(\breve{A}, \breve{B})$ *положение равновесия* $(\breve{\lambda}, x^*, w^*)$ *является невырожденным, то*

$$\Delta\lambda = \frac{(w^*)^T\, (\Delta_A - \breve{\lambda}\Delta_B)x^*}{(w^*)^T\, (\breve{B} + \Delta_B)x^*}. \tag{12}$$

Если интервальная модель Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ имеет сильное решение (x_s, w_s) , то можно оценить изменение числа Фробениуса для точечной модели.

Теорема 9. *Пусть (x_s, w_s) – сильное решение для интервальной модели Неймана $\left([\breve{A}, \hat{A}], [\breve{B}, \hat{B}]\right)$, для моделей Неймана $(\breve{A}, \breve{B})$ и $(\hat{A}, \hat{B})$ выполняются условия теоремы 4. Пусть имеется точечная модель Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$: $\tilde{A} = \breve{A} + k\Delta_A$, $\tilde{B} = \breve{B} + k\Delta_B$, $k \in [0; 1]$; её число Фробениуса равно $\tilde{\lambda}$. Тогда*

$$\tilde{\lambda} - \breve{\lambda} = k\Delta\lambda \frac{w_s^T(\breve{B} + \Delta_B)x_s}{w_s^T(\breve{B} + k\Delta_B)x_s}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что изменение числа Фробениуса может происходить неравномерно.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-96003-р_урал_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М: Наука, 1984. – 296 с.
2. Цисарь И.Ф. Компьютерное моделирование экономики. – М.: Диалог-МИФИ, 2002. – 384 с.
3. Панюков А.В., Латипова А.Т. Оптимизация бюджета продаж // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: "Рынок: теория и практика". – Челябинск: ЮУрГУ, 2006. – Вып. 4, № 15 (170). – С. 116-120.
4. Латипова А.Т., Панюков А.В. Численные методы определения положения равновесия в модели Неймана // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – № 11. – С. 1999-2007.
5. Панюков А.В., Латипова А.Т. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2008. – Т. 10, № 2 (27). – С. 150-153.
6. Panyukov A.V., Latipova A.T. Finding Equilibrium in Von Neuamnn's Model // 13 IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. – Moscow: Elsevier Ltd, 2009. – P. 395-399.
7. Панюков А.В., Латипова А.Т. Интервальная неопределенность в модели Неймана // Российская конференция "Дискретная оптимизация и исследование операций": Материалы конференции. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. – С. 213.
8. Фидлер М., Недома Й. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2008. – 288 с.

© Панюков Анатолий Васильевич,
Южно-Уральский государственный университет
(Национальный исследовательский университет),
пр-т Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39.
E-mail: a_panyukov@mail.ru

НЬЮТОНОВСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Л.Д. Попов

Несобственными называют задачи линейного программирования (ЛП), не имеющие решения, т. е. задачи с противоречивыми системами прямых и/или двойственных ограничений [1]. Такие задачи могут возникать при моделировании средствами математического программирования реальных противоречивых феноменов и объектов в экономике, технике и других областях. Поскольку противоречивая модель не имеет решения в привычном значении этого термина, необходимо строить ее обобщенные (компромиссные, аппроксимационные) решения.

Построение компромиссного решения можно разбить на два этапа. Первый этап состоит в коррекции исходных данных несобственной задачи до того состояния, при котором задача становится собственной и, следовательно, имеющей решение. Второй этап состоит в поиске обычного решения скорректированной задачи. Это решение и выбирается в качестве искомого компромисса при условии, что проведенная корректировка в том или ином смысле минимальна среди всех возможных [2,3]. В наиболее привлекательных методах эти два этапа совмещены.

Ниже будет рассмотрена наиболее простая, но важная для приложений техника приведения несобственной задачи к разрешимому виду, заключающаяся в корректировке правых частей ее прямых ограничений (для несобственных задач 1-го рода этого оказывается достаточно). Техника опирается на комбинирование методов внешних и внутренних штрафных функций [4]. Особенностью предлагаемых алгоритмов является эффективное совмещение процесса корректировки исходной постановки с непосредственным поиском решения скорректированной задачи.

1. Рассмотрим задачу линейного программирования в каноническом формате

$$\min\{(c,x):\ Ax=b,\ x\geq 0\} \tag{1}$$

и двойственную к ней задачу

$$\max\{(b,y):\ A^Ty\leq c\}. \tag{2}$$

Здесь числовая матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и векторы c и b соответствующей размерности заданы, x — вектор прямых и y – вектор двойственных переменных (неизвестных), круглые скобки используются для обозначения скалярного произведения.

Будем допускать, что задача (1) может оказаться как собственной, так и несобственной 1-го рода [1]. Это означает, что она или разрешима, или ее ограничения противоречивы, но совместны ограничения двойственной к ней задачи (2).

Несобственная задача 1-го рода может быть приведена к собственному (разрешимому) виду путем коррекции одних лишь правых частей ее ограничений. В самом деле, в силу общеизвестных теорем двойственности задача (1) с измененными (откорректированными) правыми частями ограничений

$$\min\{(c,x):\ Ax=b-u,\ x\geq 0\}\quad (=\zeta(u))$$

из-за совместности ограничений двойственной задачи не может иметь неограниченной снизу целевой функции, а, значит, автоматически становится разрешимой всякий

раз, когда система ее ограничений оказывается совместной (здесь $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор параметров коррекции исходной постановки).

В случае несобственности задачи (1) определим ее обобщенное решение. Для этого обозначим скорректированное допустимое множество

$$M(u) = \{x : \ Ax = b - u, \ \ x \geq 0\}$$

и зафиксируем вектор оптимальной коррекции

$$\bar{u} = \arg\min\{\, \|u\| : \ M(u) \neq \emptyset\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Заметим, что такой вектор всегда существует и является единственным в силу свойств метрической проекции на выпуклое замкнутое множество.

В качестве обобщенного решения исходной задачи будем рассматривать обычное решение задачи вида

$$\min\{(c, x) : \ Ax = b - \bar{u}, \ x \geq 0\} \quad (= \zeta(\bar{u})). \tag{3}$$

Заметим, что в собственном случае $\bar{u} = 0$, и обобщенное решение совпадает с обычным решением исходной задачи.

2. Предлагаемые ниже алгоритмы поиска обобщенного решения задачи (1) будут построены при дополнительном предположении о наличии у двойственной задачи (2) точки Слейтера, т. е. при условии

$$\exists w_0 \in \mathrm{R}^m : \ A^T w_0 < c. \tag{4}$$

В этом случае, как хорошо известно, задача (3) не только разрешима, но и имеет ограниченное оптимальное множество. Введем аффинное многообразие

$$\Lambda = \{(x, u) : \ Ax + u = b\} \subset \mathrm{R}^{n+m}$$

и комбинированную штрафную функцию вида

$$F_\epsilon(x, u) = (c, x) - \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \frac{1}{2\epsilon_2}\|u\|^2, \quad \text{где} \quad \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) > 0.$$

Обозначим через $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ точку минимума функции $F_\epsilon(x, u)$ относительно многообразия Λ. Нетрудно видеть, что в иной интерпретации та же самая точка $\bar{x}_\epsilon$ есть единственная точка минимума функции

$$\bar{F}_\epsilon(x) = (c, x) - \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \frac{1}{2\epsilon_2}\|Ax - b\|^2$$

относительно $\mathrm{R}_{++} = \{x \in \mathrm{R}^n : \ x > 0\}$; при этом имеем равенство $\bar{u}_\epsilon = b - A\bar{x}_\epsilon$.

Наконец, классические условия оптимальности функции $F_\epsilon(x, u)$ в точке $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ относительно многообразия Λ можно сформулировать в виде системы нелинейных уравнений, а именно

$$\Phi(x, u, v; \epsilon) = \begin{pmatrix} Ax + u - b \\ A^T u + v - \epsilon_2 c \\ v * x - \epsilon_1 \epsilon_2 e \end{pmatrix} = 0; \tag{5}$$

здесь $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — вектор вспомогательных переменных, $e = (1, \ldots, 1)$, звездочка “ $*$ ” обозначает покомпонентное произведение векторов по Адамару. Оба вектора x и v положительны (см. стандартную технологию из [5]).

Связь решений системы (5) с исследуемой проблематикой описывается следующим рядом утверждений.

Утверждение 1. Пусть оптимальное множество задачи (3) ограничено. Тогда система (5) имеет единственное решение, каковы бы ни были $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$.

Утверждение 2. Пусть выполнено предположение (4) и $0 < \epsilon_{1,2} < \bar{\epsilon}$. Тогда множество компонент $\bar{u}_\epsilon$ решений системы (5) ограничено в совокупности.

Утверждение 3. Для решений системы (5) верно неравенство

$$\zeta(\bar{u}_\epsilon) \le (c, \bar{x}_\epsilon) \le \zeta(\bar{u}_\epsilon) + n\epsilon_1.$$

Следствие 1. Пусть выполнено предположение (4) и $0 < \epsilon_{1,2} < \bar{\epsilon}$. Тогда множество компонент $\bar{x}_\epsilon$ решений системы (5) также ограничено.

Сформулируем основной результат раздела.

Утверждение 4. Пусть выполнено предположение (4). Тогда точки минимума штрафной функции $F_\epsilon(x)$ обладают свойствами сходимости:

$$b - A\bar{x}_\epsilon = \bar{u}_\epsilon \to \bar{u}, \qquad (c, \bar{x}_\epsilon) \to \zeta(\bar{u})$$

при $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to +0$.

3. Рассмотрим частный случай $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon > 0$. При фиксированном $\epsilon > 0$ решение системы (5) можно получить как предел итерационной последовательности $\{x^s, u^s, v^s\}$, элементы которой пересчитываются по правилу

$$x^{s+1} = x^s + \alpha\Delta x, \qquad u^{s+1} = u^s + \alpha\Delta u, \qquad v^{s+1} = v^s + \alpha\Delta v.$$

Здесь направление спуска находится по классической формуле Ньютона

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = -\Big(\nabla\Phi(x_s, u_s, v_s; \epsilon)\Big)^{-1} \Phi(x_s, u_s, v_s; \epsilon).$$

Матрица Якоби отображения $\Phi : \mathrm{R}^{2n+m+1} \to \mathrm{R}^{2n+m}$ равна

$$\nabla\Phi(x, u, v; \epsilon) = \begin{pmatrix} A & E_{m\times m} & 0 \\ 0 & A^T & E_{n\times n} \\ V_{n\times n} & 0 & X_{n\times n} \end{pmatrix},$$

где $V = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)$, $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ — диагональные матрицы. Она не вырождена при всех $v > 0$, $x > 0$ и имеет обратную матрицу

$$\Big(\nabla\Phi(x, u, v; \epsilon)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} DA^TH & (DM - E)D & (E - DM)V^{-1} \\ H & HAD & -HAV^{-1} \\ -A^TH & E - MD & MV^{-1} \end{pmatrix},$$

где $D = XV^{-1}$, $H = (E + ADA^T)^{-1}$, $M = A^T HA$ (легко проверяется непосредственным перемножением выписанных матриц). Начальные приближения переменных $x > 0$, $v > 0$ и u произвольные. Шаговый параметр $\alpha > 0$ в малой окрестности решения можно полагать равным 1. Для повышения робастности алгоритма на начальной стадии можно подключать традиционные процедуры корректировки этого параметра (типа дробления пополам) с тем, чтобы исключить попадание x и v в отрицательную область и обеспечить строгое убывание значений минимизируемой функции $F_\epsilon(x, u)$.

В заключение отметим, что в силу известной теоремы о неявной функции уравнения (5) на любом открытом интервале $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ определяют три векторные функции $x = x(\epsilon)$, $u = u(\epsilon)$, $v = v(\epsilon)$ — три гладкие траектории. При этом

$$\begin{pmatrix} \nabla x(\epsilon) \\ \nabla u(\epsilon) \\ \nabla v(\epsilon) \end{pmatrix} = \Big(\nabla\Phi(x, u, v; \epsilon)\Big)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 2\epsilon e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (DM - E)Dc + 2\epsilon(E - DM)V^{-1}e \\ HADc - 2\epsilon HAV^{-1}e \\ (E - MD)c + 2\epsilon MV^{-1}e \end{pmatrix}.$$

Выписанные траектории определяют некоторый обобщенный *центральный путь*, который при $\epsilon \to +0$ ведет к искомому вектору оптимальной коррекции и обобщенному решению исходной несобственной задачи.

Оба представленные подхода можно совмещать аналогично тому, как это делается в современных методах типа «предиктор-корректор» [5], где на каждом шаге итерационного процесса комбинируются два направления спуска, из которых одно отвечает за решение системы вида (5) при фиксированном $\epsilon > 0$, а другое отслеживает уменьшение штрафного параметра $\epsilon \to +0$.

4. Вычислительный эксперимент проводился как на разрешимых, так и на неразрешимых (несобственных) задачах линейного программирования средней размерности в каноническом формате в среде MATLAB. Разреженные матрицы коэффициентов тестовых задач генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от -1 до 1. Заполненность матриц ненулевыми элементами варьировалась и составляла 3–8%. Правые части ограничений и коэффициенты целевой функции подбирались таким образом, чтобы решение (обобщенное решение) задачи совпадало с некоторым заданным заранее. Изучалось поведение решения систем (5) в зависимости от изменения штрафного параметра $\epsilon > 0$. Формулы расчетов соответствуют приведенным в начале предыдущего раздела. Усредненные результаты представлены в табл. 1.

Как видно, точность решения *линейно* зависит от значения $\epsilon > 0$. Число итераций (оно показывает, сколько раз решалась система типа (5)) сравнительно невелико. Отметим, что при очень малых значениях штрафного параметра на результат начинают заметно влиять ошибки округления.

Таблица 1

Точность получаемого решения в зависимости от значения штрафного параметра

Размерность задач	Значение штрафного параметра	Точность по ограничениям $\|Ax - b + \bar{u}\|$	Точность по функционалу $\|(c, x) - \zeta(\bar{u})\|$	Точность по переменным $\|x - \bar{x}\|$	Число итераций
50×150	0,1000	0,6452	3,9850	2,3614	16
	0,0100	0,0698	0,4902	0,3017	18
	0,0010	0,0074	0,0510	0,0283	17
	0,0001	0,0008	0,0067	0,0032	19
100×300	0,1000	0,9644	6,8018	3,7336	22
	0,0100	0,0998	0,9790	0,8550	20
	0,0010	0,0099	0,1061	0,0786	18
	0,0001	0,0010	0,0682	0,0029	19
300×900	0,1000	1,6781	19,520	6,6897	29
	0,0100	0,1730	2,8901	2,5301	28
	0,0010	0,0174	0,3162	1,3018	31
	0,0001	0,0018	0,0223	0,5953	27

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00273), а также Президиума УрО РАН (программа № 15, проект 12-П-1-1023, и программа № 18, проект 12-П-1-1034).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983.
2. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. – М.: Наука, 1988.
3. Нерегулярная двойственность в математическом программировании: Сб. статей. – Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
4. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. – М.: Мир, 1972.
5. Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph. Theory and algorithms for linear optimization. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997.

© Попов Леонид Денисович,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (3433) 75-34-23, факс (3433) 74-25-81.
E-mail: popld@imm.uran.ru

РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ: МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

А.В. Пяткин

Инцидентором в ориентированном графе $G = (V, E)$ без петель называется упорядоченная пара (v, e), где $v \in V$, $e \in E$ и вершина v инцидентна дуге e. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, примыкающую к вершине v. Два инцидентора $(v, e_1), (v, e_2)$, примыкающие к одной и той же вершине v, называются *смежными*. Для дуги $e = uv$ инцидентор (u, e) называется *начальным*, а инцидентор (v, e) — *конечным*. Начальный и конечный инциденторы одной дуги называются *сопряжёнными*. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначается через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — это множество целых положительных чисел, называемых также *цветами*.

Вводя ограничения на цвета смежных и сопряжённых инциденторов, можно получать различные задачи инциденторной раскраски. Например, если потребовать, чтобы цвета любых двух смежных инциденторов были одинаковы, а цвета сопряжённых инциденторов каждой дуги — различны, то получится задача вершинной раскраски мультиграфа. Если же потребовать, чтобы цвета сопряжённых инциденторов каждой дуги были одинаковы, а цвета любых двух смежных инциденторов — различны, то получится задача рёберной раскраски мультиграфа. Таким образом, инциденторная раскраска является обобщением как вершинной, так и рёберной раскрасок мультиграфа.

Раскраска инциденторов f называется *правильной,* если смежные инциденторы раскрашены разными цветами. Пусть для каждой дуги $e \in E$ задан двухместный предикат $p_e(a, b)$, определенный для любых $a, b \in Z_+$. Тогда раскраска инциденторов f называется *допустимой*, если для каждой дуги $e = (u, v)$, инциденторы которой окрашены в цвета $f(u, e) = a$ и $f(v, e) = b$, истинен предикат $p_e(a, b)$. Задача раскраски инциденторов заключается в том, чтобы найти минимальное число χ_I, называемое *инциденторным хроматическим числом*, для которого существует правильная и допустимая раскраска инциденторов мультиграфа G цветами из интервала $[1, \chi_I]$.

Первая задача раскраски инциденторов была сформулирована в работе [11] в качетсве модели для решения следующей прикладной задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи. Пусть задана локальная коммуникационная сеть, состоящая из центральной ЭВМ и n шин пропускной способности 1, соединяющих её с периферийными объектами. Для каждой пары объектов заранее известен общий объём информации d_{ij}, который i-й объект должен передать j-му. Считается, что $d_{ii} = 0$ для любого i. Передача сообщений может быть организована следующими способами.

1. Центральная ЭВМ соединяет i-ю шину с j-й напрямую. В этом случае единица информации из i-го объекта передается в j-й (или, наоборот, из j-го в i-й) без запоминания в центральной ЭВМ за одну единицу времени.

2. Информацию, которую i-й объект должен передать j-му, можно сначала получить по i-й шине и запомнить в центральной ЭВМ, а затем передать по j-й шине адресату. Считается, что при этом память центральной ЭВМ больше суммы всех d_{ij}.

Требуется так организовать передачу всех сообщений, чтобы соблюсти все ограничения и уложиться в наименьшее время.

Построим математическую модель этой задачи следующим образом. Пусть $G = (V, E)$ — n-вершинный ориентированный мультиграф с множеством вершин V и множеством дуг E, в котором i-й шине соответствует i-я вершина графа, а число

рёбер, ведущих из i-й вершины в j-ю, равно d_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, каждая дуга мультиграфа соответствует одной единице информации, которую требуется передать из i-го объекта в j-й. Для построения расписания передачи сообщений для каждой единицы информации необходимо задать два момента времени: когда она передаётся по первой шине и когда — по второй. При первом способе передачи информации оба этих момента совпадают; при втором способе передача информации по первой шине должна предшествовать передаче информации по второй. Эти моменты времени можно трактовать как цвета инциденторов дуги, соответствующей данной единице информации. Поскольку пропускные способности всех шин равны 1, цвета любых смежных инциденторов должны быть различны. В итоге получаем задачу поиска правильной раскраски инциденторов мультиграфа G с предикатом $p_e(a, b) = \{a \leq b\}$ для каждой дуги $e \in E$. Эта задача исторически стала первой задачей раскраски инциденторов; в [11] было доказано, что для нее $\chi_I = \Delta$, где Δ — это максимальная степень мультиграфа G (соответствующая максимальной нагрузке на шину в исходной задаче).

В более поздних работах рассматривались следующие модификации исходной задачи: случай произвольных пропускных способностей шин, задача с двумя сеансами передачи сообщений, задача с ограниченной памятью, задача Визинга–Мельникова (фиксированный способ передачи каждого сообщения), двухуровневая сеть. Оказалось, что модель инциденторной раскраски обладает удивительной гибкостью: практически все перечисленные модификации (столь разные по смыслу) удалось выразить на языке раскраски инциденторов, при этом меняя лишь предикат $p_e(a, b)$. Так возникла общая постановка задачи раскраски инциденторов, сформулированная выше, которая представляет интерес для исследования и сама по себе.

Были исследованы следующие задачи раскраски инциденторов.

1. Задача инциденторной раскраски взвешенного мультиграфа. Исследованы случаи как ориентированного, так и неориентированного мультиграфа. Пусть каждой дуге (ребру) мультиграфа без петель сопоставлено некоторое целое неотрицательное число $w(e)$, называемое *весом* дуги (ребра). В ориентированном случае для каждой дуги $e \in E$ задан предикат $p_e(a, b) = \{b - a \geq w(e)\}$. В неориентированном случае для каждого ребра $e \in E$ задан предикат $p_e(a, b) = \{|b - a| \geq w(e)\}$. Доказана NP-полнота соответствующих задач распознавания как в ориентированном [8], так и в неориентированном случаях [9]. Также в этих работах получены верхние и нижние оценки для инциденторного хроматического числа взвешенного мультиграфа.

2. (k, l)-раскраска инциденторов. Пусть заданы такие целые числа k, l, что $0 \leq k \leq l$. Правильная раскраска инциденторов называется *(k, l)-раскраской*, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги принадлежит интервалу $[k, l]$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k, l)-раскраски инциденторов мультиграфа G, называется *(k, l)-хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{k,l}(G)$. В случае $k = l = 0$ имеем обычную задачу рёберной раскраски мультиграфов, и $\chi_{0,0}(G)$ — это рёберное хроматическое число мультиграфа G. В двух случаях — при $l = \infty$ и при $k = 0$ — задача решена: $\chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta(G), \Delta^+(G) + k, \Delta^-(G) + k\}$ и $\chi_{0,1}(G) = \Delta(G)$ (через $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ обозначены исходящая и входящая полустепени графа G соответственно). Первый результат был впервые доказан автором, но наиболее красивое доказательство нашёл В.Г. Визинг [4]. Второй результат получен в работе [7]. В работе [4] было также доказано, что $\chi_{k,l}(G) = \chi_{k,\infty}(G)$ при $l \geq \Delta(G) - 1$.

Также представляет интерес параметр $\chi_{k,l}(\Delta) = \max\{\chi_{k,l}(G) \mid \Delta(G) = \Delta\}$ равный наименьшему числу цветов, в которое можно раскрасить инциденторы любого мультиграфа степени Δ. В работе [12] установлено, что при любом $k \geq 1$ имеет место верхняя оценка $\chi_{k,k}(\Delta) \leq \lceil 3\Delta/2 \rceil + k - 1$, а в работе [13] — что для любого $k \geq 1$ и $l \geq \lceil \Delta/2 \rceil$ выполняется равенство $\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = \Delta + k$. Там же для любого нечётного Δ построена бесконечная серия примеров мультиграфов, $(1,1)$-хроматическое число которых равно $\Delta + 2$. Для других параметров k и l, а также для чётного Δ неизвестно ни одного примера графа, для которого выполнялось бы неравенство $\chi_{k,l}(G) > \Delta(G) + k$. Возможно, их и не существует. Так, в [14] доказано, что $\chi_{1,1}(4) = 5$.

3. Предписанная раскраска инциденторов. Рассматривается задача инциденторной раскраски взвешенного мультиграфа с дополнительным условием, что цвет каждого инцидентора дуги e лежит в некотором заранее заданном множестве допустимых цветов $L(e)$ (*предписании* дуги e). В.Г. Визинг [1] доказал, что для существования раскраски достаточно выполнения условия $|L(e)| \geq \Delta(G) + w(e) + 1$ для каждой дуги e; более того, при четном Δ достаточно выполнения условия $|L(e)| \geq \Delta(G) + w(e)$ для каждой дуги e. Неизвестно, верно ли это утверждение для нечетного Δ. В работе [15] оно было доказано для $\Delta = 3$.

4. Тотальная раскраска инциденторов. В этой задаче помимо инциденторов красятся также и вершины мультиграфа, так чтобы цвет каждой вершины отличался от цветов ее соседей и от цветов примыкающих к ней инциденторов. В.Г. Визинг [2] показал, что тотальное инциденторное хроматическое число $\chi^T_{k,\infty}(G) \leq \chi_{k,\infty}(G) + 2$, причём $\chi^T_{0,\infty}(G) = \Delta(G) + 1$. В той же работе была выдвинута гипотеза, что $\chi^T_{k,\infty}(G) \leq \chi_{k,\infty}(G) + 1$ для любого k.

5. Интервальная раскраска инциденторов. В данном виде раскраски усиливается требование на цвета смежных инциденторов: они должны быть не просто различны, но и при каждой вершине идти подряд, т. е. образовывать интервал. Для интервального инциденторного хроматического числа будем использовать обозначение χ^{int}. В [3] доказано, что $\chi^{int}_{0,\infty}(G) \leq \max\{\Delta(G), \Delta^+(G) + \Delta^-(G) - 1\}$ и $\chi^{int}_{1,\infty}(G) \leq \Delta^+(G) + \Delta^-(G)$; там же показано, что интервальной (k,∞)-раскраски инциденторов может не существовать при $k \geq 2$.

6. Раскраска инциденторов неориентированных мультиграфов. В случае неориентированных мультиграфов естественным образом изменяется ограничение на цвета сопряженных инциденторов: вместо разности цветов конечного и начального инциденторов рассматривается модуль разности цветов сопряженных инциденторов. Таким образом, инциденторное хроматическое число неориентированного мультиграфа есть минимальное из инциденторных хроматических чисел его ориентаций. Это наблюдение позволяет перенести большинство результатов для ориентированных мультиграфов на неориентированный случай. Однако некоторые результаты для неориентированных мультиграфов достаточно интересны. Так, В.Г. Визинг и Б. Тофт [10] показали, что для тотальной раскраски неориентированного мультиграфа G имеет место оценка $\chi^T_{k,\infty}(G) \leq \chi_{k,\infty}(G) + 1$. В отличие от ориентированного случая, интервальная раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа всегда существует [5]. В работе [6] получены формулы и оценки для $\chi_{k,l}(G)$, из которых, в частности, вытекает удивительный факт: для любых двух однородных неориентированных мультиграфов G и H степени Δ имеет место равенство $\chi_{k,l}(G) = \chi_{k,l}(H)$.

Открытые проблемы. Наиболее интересными из открытых проблем, по мнению автора, являются следующие:

1. Верно ли, что для любого $k \geq 1$ существует такое l, что для всякого Δ выполняется равенство $\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = \Delta + k$?

2. Чему равны значения $\chi_{1,2}(5)$ и $\chi_{2,2}(5)$?

3. Верно ли, что для любого чётного Δ выполняется равенство $\chi_{1,1}(\Delta) = \Delta + 1$?

4. Правда ли, что если $|L(e)| \geq \Delta(G) + w(e)$ для каждой дуги e, то предписанная раскраска инциденторов существует?

5. Выполняется ли в ориентированном случае оценка $\chi^T_{k,\infty}(G) \leq \chi_{k,\infty}(G) + 1$?

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 12-01-00090, № 10-07-00195), EPSRC Grant EP/F064551/1, грантом федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), а также грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Визинг В.Г. Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2000. – Т. 7, № 1. – С. 32-39.
2. Визинг В.Г. Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2000. – Т. 7, № 3. – С. 6-16.
3. Визинг В.Г. Интервальная раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2001. – Т. 8, № 2. – С. 40-51.
4. Визинг В.Г. Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2002. – Т. 9, № 1. – С. 27-41.
5. Визинг В.Г. Интервальная раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2003. – Т. 10, № 1. – С. 14-40.
6. Визинг В.Г. О (p, q)-раскраске инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2005. – Т. 12, № 4. – С. 23-39.
7. Визинг В.Г., Мельников Л.С., Пяткин А.В. О (k, l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2000. – Т. 7, № 4. – С. 29-37.
8. Визинг В.Г., Пяткин А.В. О раскраске инциденторов в ориентированном взвешенном мультиграфе // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2006. – Т. 13, № 1. – С. 33-44.
9. Визинг В.Г., Пяткин А.В. Об оценках инциденторного хроматического числа взвешенного неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2007. – Т. 14, № 2. – С. 3-15.
Перевод: Pyatkin A.V., Vizing V.G. Bounds for the incidentor chromatic number of a weighted undirected multigraph // Journal of Applied and Industrial Math. – 2008. – Vol. 2, № 3. – P. 432-439.
10. Визинг В.Г., Тофт Б. Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2001. – Т. 8, № 3. – С. 3-14.
11. Пяткин А.В. Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 1995. – Т. 2, № 4. – С. 74-79.

Перевод: Pyatkin A.V. Some optimization problems of scheduling the transmission of messages in a local communication network // A.D. Korshunov (ed.), Operations Research and Discrete Analysis. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. – 1997. – P. 227-232.
12. Пяткин А.В. Некоторые верхние оценки для инциденторного (k, l)–хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2003. – Т. 10, № 2. – С. 66-78.
13. Пяткин А.В. Верхние и нижние оценки для инциденторного (k, l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2004. – Т. 11, № 1. – С. 93-102.
14. Пяткин А.В. Об $(1, 1)$-раскраске инциденторов мультиграфов степени 4 // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2004. – Т. 11, № 3. – С. 59-62.
15. Пяткин А.В. О предписанной раскраске инциденторов в мультиграфе степени 3 // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1, 2007. – Т. 14, № 3. – С. 80-89.
Перевод: Pyatkin A.V. On list incidentor coloring of a multigraph of degree 3 // J. of Applied and Industrial Math. – 2008. – Vol. 2, № 4. – P. 560-565.

© Пяткин Артем Валерьевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел.: (383) 363-45-46, факс (383) 332-25-98.
E-mail: artem@math.nsc.ru

РАННИЕ РАБОТЫ Л.В. КАНТОРОВИЧА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ: К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

И.В. Романовский

20 января этого года исполнилось 100 лет со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича, замечательного математика и экономиста.

Он был избран действительным членом Академии Наук СССР, удостоен главных отечественных премий – Сталинской в 1948 г. *за статьи по применению функционального анализа в вычислительной математике* и Ленинской в 1965 г. *за научную разработку метода линейного программирования и экономических моделей* (совм. с экономистами В.С. Немчиновым и В.В. Новожиловым), а в 1975 г. Нобелевской премии по экономике *за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в народном хозяйстве* (совм. с Т. Купмансом).

В докладе будет рассказано о том, как еще очень молодой, но уже очень известный математик во время заурядной консультации с пришедшим к нему инженером из Всесоюзного Фанерного треста встретился с экстремальной задачей нового для него типа. Он увидел, что известные методы в этой задаче не работают, и придумал новый подход. Вскоре он увидел, что возникающие при этом подходе вспомогательные коэффициенты могут иметь большое экономическое значение. Об этом он написал брошюру [1], изданную в 1939 г. Немного позднее была подготовлена статья [2], описывающая математическую сторону подхода.

Обдумывая возможные применения этого открытия, Леонид Витальевич увидел возможность решения задач оптимальной транспортировки. На эту тему была опубликована статья [3], а еще раньше подготовлена статья [4], предназначенная для транспортников, но опубликованная в их сборнике только в 1949 г. Интересно, что очень близкой задачей занимался французский математик Гаспар Монж [5]. Задача Монжа-Канторовича вызывает сейчас большой интерес.

Во время войны Канторович преподавал в Высшем военном инженерно-техническом училище, готовящем военных инженеров-строителей. Попутно он работал над книгой «Экономический расчет, обеспечивающий наиболее целесообразное использование ресурсов». Эту книгу удалось издать только в 1959 г. [6] (название слегка изменилось).

Но некоторые возможности публикаций и исследовательской работы появились у Л.В. Канторовича еще в «сталинские» времена, в связи с присуждением Леониду Витальевичу Сталинской премии 1948 г. Тогда была напечатана статья [4] и статья о распиловке древесины, тоже пролежавшая очень долго.

В то же время под руководством Леонида Витальевича его молодой сотрудник В.А. Залгаллер начал работу по рациональному раскрою на Вагоностроительном заводе. Работа была более чем успешной — Залгаллер вручную решал задачи для реального производства, существенно экономя дефицитные материалы. Здесь были впервые опробованы в реальной обстановке методы линейного (до Данцига) и даже динамического (до Беллмана) программирования, хотя все вычисления велись вручную. По материалам работы была выпушена книга [7], которая в дальнейшем была переиздана в 1971 г., а сейчас переиздана еще раз. (Оба переиздания содержат большие библиографические обзоры, написанные сначала В.А. Залгаллером, а потом Э.А. Мухачевой.)

В 50-е годы в США начинает бурно развиваться линейное и динамическое программирование. К счастью, в Советском Союзе создается ВИНИТИ и система рефе-

ративных журналов, и в конце 1950-х гг. мы получили возможность следить за свежей научной литературой, прекрасной по тем временам. Работы Л.В. Канторовича становятся известными на Западе. Перевод брошюры [1] был опубликован в журнале *Management Science*. Подробности описаны во вступительной статье Вс.Л. Канторовича в [1a].

Вспомним еще, что в это же время Издательство иностранной литературы предложило Л.В. Канторовичу организовать перевод книги «Линейные неравенства и смежные вопросы» – важного сборника статей, подготовленного в Принстонском университете. Книга с приложением учебника английского математика С. Вайды была переведена под редакцией Л.В. Канторовича и В.В. Новожилова [8]. Издание оказалось очень своевременным (я горд, что мне тоже довелось в нем участвовать) — оно привлекло внимание молодых математиков к такой интересной и актуальной проблематике. Вслед за «Линейными неравенствами» были очень быстро переведены еще несколько книг, в том числе классические книги Р. Беллмана [9], Дж. Данцига [10], Д. Гейла, С. Карлина и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
1a. *Ротапринтное воспроизведение* [1] *со вступ. статьей Вс.Л. Канторовича*: СПб: Издательский дом СПбГУ, 2012.
2. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 28, № 3. – С. 212-215.
3. Канторович Л.В. О перемещении масс // Доклады АН СССР. – 1942. – Т. 37, №7/8. – С. 227-229.
4. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – С. 110-138.
5. Monge G. Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais // Mémoires de Academie Royale des Sciences, 1781. – P. 666-706.
6. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд-во АН, 1959. – 344 с.
7. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. – Л.: Лениздат, 1951. – 198 с. / 3-е изд.: Рациональный раскрой промышленных материалов. – СПб.: Невский Диалект, 2012. – 304 с.
8. Кун Г., Таккер А., ред. Линейные неравенства и смежные вопросы. / Сб. статей с приложением книги С. Вайды «Теория игр и линейное программирование» / Пер. под ред. Л.В. Канторовича и В.В. Новожилова. – М., ИЛ, 1959.
9. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., ИЛ, 1960.
10. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966.

© Романовский Иосиф Владимирович,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетский пр-т, 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504, Россия,
тел./факс: (812) 428-69-44. E-mail: josephromanovsky@gmail.com

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С.В. Севастьянов

1. Вместо введения

Как известно, высокая вычислительная сложность является характерной чертой большинства задач дискретной оптимизации. Однако сам факт высокой сложности задачи (доказываемый, как правило, для задачи в самом общем её виде) не снимает актуальности вопроса о её практическом решении. А потому, требуется дальнейший анализ задачи, который позволил бы более явно выявить факторы, решающим образом влияющие на её вычислительную сложность (обнаружить ту самую "зарытую собаку").

Само слово "анализ" подразумевает "разделение", "разрезание" исследуемого объекта на части. Для исследования интересующего нас объекта (т.е. задачи дискретной оптимизации) мы также будем производить её "разрезы", выбирая в качестве направления разрезов — ограничения на те или иные параметры задачи. Таким образом, "дальнейший анализ" сложности задачи сводится к её *параметрическому анализу.*

Любая задача дискретной оптимизации, как известно, описывается в терминах множества параметров. Так например, основными параметрами, с помощью которых может быть описана цеховая задача теории расписаний, являются: число машин (m), число работ (n), число операций каждой работы (ν_j) и длительность каждой операции (p_{ji}). Помимо основных параметров, для параметрического анализа могут быть выбраны и другие "направления разреза" задачи, представляющие интерес в плане "анатомии" сложности задачи. Например, в той же цеховой задаче нас могут интересовать: максимальное число операций одной работы (ν); максимальное число операций, выполняемых на одной машине (μ); максимальная длительность операции ($p_{\max}$); ограничение сверху ($\bar{p}$) на число различных значений параметров p_{ji}; параметр (C), задающий ограничение сверху на допустимую длину расписания (в задачах распознавания из класса NP), и т.д. Уже только приведённый перечень параметров наглядно демонстрирует читателю тот очевидный факт, что параметрический анализ сложности задач дискретной оптимизации — весьма непростое дело!

Цель данной работы — проиллюстрировать на нескольких примерах целесообразность развития нового подхода к анализу сложности дискретных задач, называемого *многопараметрическим анализом.* Вначале мы представим основные понятия, используемые в рамках данного подхода. Затем в качестве иллюстрации эффективного применения данного подхода будут рассмотрены классические цеховые задачи на минимум длины расписания (задачи open shop, job shop, mixed shop) и задача о связной предписанной раскраске вершин графа. Обсуждаются результаты четырёх-параметрического анализа сложности указанных задач.

2. Основные понятия многопараметрического анализа сложности задач

Что же понимается под "многопараметрическим анализом сложности"? Как мы уже убедились, у задачи может иметься много параметров, по которым нам хотелось бы провести анализ её сложности (и который реально проводится в многочисленной исследовательской литературе) — но это ли имеется в виду? Вовсе нет. Обычно под

"параметрическим" анализом сложности понимается *одномерный анализ*, проводимый по тому или иному параметру (причём, — независимо для разных параметров). Схема анализа такова: вводится "ограничитель" на исследуемый параметр и находится то *критическое значение* данного ограничителя, при переходе через который задача резко меняет свою сложность. Однако на наш взгляд, получаемая при таком анализе картина сложности исследуемой задачи является слишком "плоской" (даже если провести такой анализ по каждому интересующему нас параметру). Гораздо больше информации предоставляет исследование подзадач, получаемых в результате введения **одновременных ограничений сразу на несколько ключевых параметров** исходной (общей) задачи. Правда, при этом задача отыскания границы между областями "простых" и "труднорешаемых" подзадач, пролегающей в многомерном пространстве, становится намного сложнее (в отличие от одномерного анализа, когда границей является единственное число).

Итак, первым шагом при проведении многопараметрического анализа задачи является выбор её *ключевых параметров* $x_1, \ldots, x_n$, по которым будет отслеживаться её сложность. Для каждого *примера* I исходной задачи $\mathcal{P}$ (или для каждой *индивидуальной задачи*) значения ключевых параметров должны быть однозначно определены. При этом вектор $\chi(I) = (x_1(I), \ldots, x_n(I))$ будем называть *характеристическим вектором* примера I. (Без ограничения общности, мы можем всегда считать ключевые параметры числовыми, и даже — целочисленными.)

Пусть X_i обозначает множество значений параметра x_i, а $\bar{X}_i$ — множество значений, расширенное значением $\{+\infty\}$. (Смысл такого расширения будет объяснён позднее.) Для двух векторов $x' = (x'_1, \ldots, x'_n), x'' = (x''_1, \ldots, x''_n) \in \bar{\mathcal{X}}$ будем писать $x' \leq x''$, если $x'_i \leq x''_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Далее определяются *ограничения* на значения ключевых параметров — эти ограничения служат цели сужения множества примеров исходной задачи до размера некоторой *подзадачи*. Ожидаемый эффект от такого сужения — уменьшение сложности задачи. (Например, исходная NP-полная задача может стать полиномиально разрешимой.) Данный эффект объясняется тем, что мы определяем сложность задачи по её "худшему случаю". Следовательно, уменьшая число случаев, мы уменьшаем и эффект от худшего случая.

С этим выводом несогласны некоторые "исследователи сложности", которые приводят множество примеров, когда подзадача какой-нибудь полиномиально разрешимой задачи допускает существенно более компактную схему кодирования входной информации, и в результате может оказаться NP-полной. Однако легко заметить, что в этом случае по отношению к примерам такой подзадачи допускается "двойной стандарт": они по-разному кодируются в рамках общей задачи и её подзадач.

Чтобы избежать возникновения описанной выше парадоксальной ситуации, мы в наших исследованиях при определении термина *подзадача* принимаем следующее

Соглашение. Каждый пример исходной задачи $\mathcal{P}$ использует **одну и ту же схему кодирования** независимо от того, в рамках какой из *подзадач* исходной задачи $\mathcal{P}$ (включая саму задачу $\mathcal{P}$) он рассматривается.

Как следствие из этого соглашения, мы получаем следующее утверждение (используемое в качестве постулата в классической монографии Гэри и Джонсона).

Утверждение. Вычислительная сложность всякой *подзадачи* задачи $\mathcal{P}$ не превосходит сложности исходной задачи $\mathcal{P}$.

В качестве ограничений, накладываемых на ключевые параметры, мы будем рассматривать простейший их случай: *вектор-ограничитель* $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$, задающий ограничения сверху на каждый из ключевых параметров. Каждый вектор $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$ тем самым определяет подзадачу $\mathcal{P}_{\bar{x}} = \{I \in \mathcal{P} \mid \chi(I) \leq \bar{x}\}$ исходной задачи $\mathcal{P}$. Таким образом, мы получаем класс подзадач $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}}) = \{\mathcal{P}_{\bar{x}} \mid \bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}\}$ по всевозможным значениям вектора-ограничителя, и мы хотели бы установить сложность каждой подзадачи из этого класса. Заметим, что если для двух векторов $x' = (x'_1, \ldots, x'_n), x'' = (x''_1, \ldots, x''_n) \in \bar{\mathcal{X}}$ выполнено соотношение $x' \leq x''$, то задача $\mathcal{P}_{x'}$ является подзадачей задачи $\mathcal{P}_{x''}$, поскольку каждый пример, входящий в $\mathcal{P}_{x'}$, входит и в $\mathcal{P}_{x''}$.

Теперь мы можем объяснить смысл введения расширенного множества значений для компонент вектора-ограничителя. Пусть x_i — некоторый численный параметр (например, число работ в заданном примере). Ясно, что мы можем разрешить только конечные значения этого параметра, поскольку мы не можем решать примеры бесконечного размера. В то же время, бесконечное значение ограничителя $\bar{x}_i$ даёт нам возможность рассматривать подзадачи, содержащие примеры с произвольно большими значениями параметра x_i.

Пусть множества $\mathcal{P}_P(\bar{\mathcal{X}})$ и $\mathcal{P}_{NP}(\bar{\mathcal{X}})$ определяют подклассы полиномиально разрешимых и NP-полных задач из класса $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}})$, и пусть $\bar{\mathcal{X}}_P = \{\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}} \mid \mathcal{P}_{\bar{x}} \in \mathcal{P}_P(\bar{\mathcal{X}})\}$ и $\bar{\mathcal{X}}_{NP} = \{\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}} \mid \mathcal{P}_{\bar{x}} \in \mathcal{P}_{NP}(\bar{\mathcal{X}})\}$ обозначают множества их векторов-ограничителей. В тех случаях, когда выполняется равенство $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}}) = \mathcal{P}_P(\bar{\mathcal{X}}) \cup \mathcal{P}_{NP}(\bar{\mathcal{X}})$, мы говорим, что класс подзадач $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}})$ обладает свойством *дихотомии*.

Определение. Мы говорим, что пара $(\mathcal{X}', \mathcal{X}'')$ подмножеств векторов-ограничителей $\mathcal{X}', \mathcal{X}'' \subseteq \bar{\mathcal{X}}$ является *вполне представительной системой* векторов из $\bar{\mathcal{X}}$, если

(a) для любого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}'$ определяемая им задача $\mathcal{P}_{\bar{x}}$ является полиномиально-разрешимой;

(b) для любого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}''$ определяемая им задача $\mathcal{P}_{\bar{x}}$ является NP-полной;

(c) любой вектор $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$ либо мажорируется множеством $\mathcal{X}'$, либо минорируется множеством $\mathcal{X}''$ (иначе говоря, вектор $\bar{x}$ мажорирует некоторый вектор из $\mathcal{X}''$).

Соответствующая пара подмножеств подзадач $(\mathcal{P}(\mathcal{X}'), \mathcal{P}(\mathcal{X}''))$ называется *вполне представительной системой подзадач* из класса $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}})$.

Заметим, что если во вполне представительной системе векторов $(\mathcal{X}', \mathcal{X}'')$ мы имеем два сравнимых вектора либо в $\mathcal{X}'$, либо в $\mathcal{X}''$, то меньший из них может быть удалён из $\mathcal{X}'$ в первом случае, а больший из двух — из $\mathcal{X}''$ во втором случае. В обоих случаях система векторов после удаления одного вектора остаётся вполне представительной. В идеале, для наиболее эффективной проверки свойства (c) для произвольно заданного вектора $\bar{x} \in \bar{\mathcal{X}}$ мы заинтересованы в нахождении минимально возможной вполне представительной системы векторов, в которой никакие два вектора из $\mathcal{X}'$ (также как и никакие два вектора из $\mathcal{X}''$) не являются сравнимыми. Если вполне представительная система векторов с таким свойством "несравнимости" существует, то она совпадает с парой множеств $(\bar{\mathcal{X}}_P^{\max}, \bar{\mathcal{X}}_{NP}^{\min})$, состоящих из всех максимальных векторов из $\bar{\mathcal{X}}_P$ и всех минимальных векторов из $\bar{\mathcal{X}}_{NP}$ соответственно. В этом случае соответствующая вполне представительная система подзадач называется *базисной системой подзадач*.

В явном виде это понятие было впервые введено в работе (Sevastianov, 2005), где также была доказана её единственность (в случае её существования) и получены

достаточные условия её конечности. В случае установления существования и конечности базисной системы это даёт эффективный механизм определения сложности любой подзадачи из рассматриваемого (как правило, бесконечного) параметрического класса: достаточно сравнить вектор-ограничитель подзадачи с такими векторами для каждой из базисных подзадач.

Из приведённых выше определений непосредственно вытекает

Лемма 4. *Для параметризованного класса задач $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}})$ базисная система подзадач существует если и только если пара множеств векторов $(\bar{\mathcal{X}}_P^{\max}, \bar{\mathcal{X}}_{NP}^{\min})$ является вполне представительной системой векторов из множества $\bar{\mathcal{X}}$.* □

3. Опыт 4-параметрического анализа сложности дискретных задач

Пример класса задач $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}})$, не имеющего базисной системы подзадач, был представлен в работе (Каширских, Севастьянов, Черных, 2000). Класс подзадач задачи open shop определялся комбинациями ограничений на ключевые параметры (n, ν, m, μ). Было показано, что множество векторов $\bar{\mathcal{X}}_P^{\max}$ не мажорирует множества $\bar{\mathcal{X}}_P$. Подобная ситуация может быть легко проиллюстрирована в случае анализа сложности по отношению к единственному числовому параметру x, который может принимать произвольно большие значения. Тогда может случиться так, что для любого конечного значения x' ограничителя $\bar{x}$ соответствующая подзадача $\mathcal{P}_{x'}$ является полиномиально разрешимой, тогда как подзадача $\mathcal{P}_\infty$ NP-полна. В этом случае множество $\bar{\mathcal{X}}_P^{\max}$ максимальных элементов множества $\bar{\mathcal{X}}_P$ пусто, и не может мажорировать множества $\bar{\mathcal{X}}_P$. (В случае много-параметрического анализа доказательство подобного факта является более сложным, но использует ту же идею.) В этом случае пара $(\bar{\mathcal{X}}_P^{\max}, \bar{\mathcal{X}}_{NP}^{\min})$ не образует вполне представительную систему векторов (свойство (c) не выполняется), и по лемме 4, базисной системы подзадач не существует. В то же время, существует вполне представительная система векторов из множества $\bar{\mathcal{X}}$. (И как следствие, выполнено свойство дихотомии.)

В другой работе (Кононов, Севастьянов, Свириденко, 2011) 4-параметрический анализ сложности выполнен по отношению к классу подзадач смешанной цеховой задачи $(J + \widehat{O})$. Класс подзадач определён системой одновременных ограничений на параметры: $\mathfrak{M}$, p_{ij}, ν, C, где первый параметр принимает значения из множества $\{J, O, \widehat{O}, (J+O), (J+\widehat{O})\}$ и обозначает тип задачи: job shop, классическая open shop, обобщённая open shop, а также задачи, получающиеся при смешивании этих двух типов. Ограничения на второй и третий параметры задают максимально допустимые значения длительностей операций и числа операций одной работы, соответственно. Четвёртый параметр ограничивает длину расписания (в задаче распознавания), и в системе подзадач мы задаём ограничение сверху на этот параметр. Три последних параметра объединены общей идеей исследования так называемых “коротких” расписаний, имеющих ограниченную длину. Ясно, что если длину расписания ограничить сверху небольшой константой, то и другие два параметра (максимальная длительность операции и число операций одной работы) будут автоматически ограничены сверху этой величиной (по крайней мере, если речь идёт о числе ненулевых операций работы). В то же время данные три параметра можно рассматривать и как формально независимые друг от друга. Представленные результаты являются дальнейшим

развитием результатов по анализу сложности цеховых задач, полученных в работе (Williamson et al., 1997).

Формально не связанным с этой тройкой параметров является первый параметр. В то же время, было известно, что смешивание разных типов задач может приводить к задаче, обладающей существенно новыми свойствами, каких не было у её "родителей". Так например, для классических цеховых задач job shop и open shop с допущениями прерываний операций было известно, что можно ограничиться расписаниями с прерываниями лишь в целых точках. Однако смешивание этих двух задач породило задачу, в которой не только данное свойство было нарушено, но и длина оптимального расписания могла оказаться нецелой. Было интересно проследить этот феномен по отношению к вычислительной сложности задачи. И действительно, оказалось, что и здесь смешивание задач разных типов приводит к новой задаче с кардинально другими свойствами. Так, если ранее было установлено (Williamson et al., 1997), что проверка существования расписаний длины не больше 3 для задач job shop и open shop (без прерываний) полиномиально выполнима, то по отношению к смешанной задаче эта же процедура оказывается NP-полной.

В целом, показано, что для рассматриваемого 4-параметрического семейства подзадач существует базисная система, состоящая из 10 подзадач, 5 из которых полиномиально разрешимы, а другие 5 — NP-полны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каширских К.Н., Севастьянов С.В., Черных И.Д. Четырехпараметрический анализ сложности задачи open shop // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 1, 2000. – Т. 7, № 4. – С. 59-77.
2.Кононов А.В., Севастьянов С.В. О сложности нахождения связной предписанной раскраски вершин графа // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 1, 2000. – Т. 7, № 2. – С. 21-46.
3. Kononov A., Sevastyanov S., Sviridenko M. A complete 4-parametric complexity classification of short shop scheduling problems // Journal of Scheduling. – 2011. – DOI: 10.1007/s10951-011-0243-z.
4. Sevastianov S. An introduction to multi-parameter complexity analysis of discrete problems // European J. Oper. Res. – 2005. – Vol. 165, № 2. – P. 387-397.
5. Williamson D., Hall L., Hoogeveen J., Hurkens C., Lenstra J.K., Sevastianov S., & Shmoys D. Short shop schedules // Oper. Res., – 1997. – Vol. 45, № 2. – P. 288-294.

© Севастьянов Сергей Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 36-34-618, факс: (383) 333-25-98.
E-mail: seva@math.nsc.ru

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

В.В. Сервах

Введение. Важным направлением дискретной оптимизации является календарное планирование сроков выполнения совокупности взаимосвязанных работ в условиях ограниченных ресурсов. Такие задачи возникают при реализации космических и военных программ, разработке месторождений, строительстве и реконструкции предприятий, проектировании новых изделий, их запуске в производство и так далее. Отметим большое разнообразие рассматриваемых в литературе постановок в зависимости от вида работ, технологии их выполнения, типов и количества ресурсов, характера их потребления и так далее.

В традиционной постановке задачи календарного планирования требуется выполнить множество взаимосвязанных работ. Взаимосвязь задается некоторым частичным порядком. Объемы выделенных ресурсов и графики их поступления заданы. Рассматриваются ресурсы как возобновимого, так и складируемого типа. Каждая работа характеризуется длительностью и потребностью в ресурсе каждого вида. В некоторых постановках могут быть заданы директивные сроки завершения выполнения работ. Прерывания выполнения работ не допускаются. Требуется определить такие сроки выполнения работ проекта с учетом технологического порядка, директивных сроков и ограничений на ресурсы, при которых достигается оптимальное значение некоторой целевой функции.

Планирование производственных инвестиционных проектов, в отличии от традиционной постановки, имеет свои особенности. Такие проекты направлены на получение прибыли. Их планирование осуществляется в долгосрочной или среднесрочной перспективе, и поэтому большинство ресурсов может быть трансформировано в финансовый ресурс, который является складируемым. Кроме того, имеется возможность использования кредитов и реинвестирования получаемой от выполнения работ прибыли. Поступления от работ проекта являются, как правило, случайными величинами, и приходится учитывать риск, связанный либо с недополучением прибыли, либо с невыполнением проекта. Эти особенности приводят к разнообразным постановкам задач. Особо актуально направление, связанное с планированием крупномасштабных проектов, требующих больших капитальных затрат [1, 2, 3].

2. Постановка задачи календарного планирования инвестиционных проектов. Имеется множество работ $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ и частичный порядок их выполнения E. Работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$ и потоком платежей $(c_j(0), c_j(1), \ldots, c_j(\tau), \ldots, c_j(p_j))$, где $c_j(\tau)$ — разница между поступлениями и расходами в момент времени τ, считая от начала выполнения работы, $\tau = 0, 1, \ldots, p_j$. Если $c_j(\tau) < 0$, то в момент времени τ требуются капиталовложения, а если $c_j(\tau) > 0$, то получаем доход. Предполагается, что каждая работа выполняется без прерываний. В момент времени t имеются финансовые ресурсы $K(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$, где T — горизонт планирования проекта.

Для сравнения капитала в разные моменты времени используется операция приведения к начальному моменту времени или дисконтирования, связанная с альтернативной возможностью размещения капитала на рынке под безрисковую процентную ставку r_0. Величина $NPV_j = \sum_{\tau=0}^{p_j} \frac{c_j(\tau)}{(1+r_0)^\tau}$ называется чистой прибылью работы $j \in V$, приведенной к началу ее выполнения (Net Present Value). Если $NPV_j > 0$, то работа приносит прибыль. Это означает, что вложенный в эту работу капитал приносит доход больше, чем его альтернативное безрисковое размещении под ставку r_0.

Обозначим через s_j момент начала выполнения работы $j \in V$. Вектор $S = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ называется расписанием выполнения работ проекта. В силу целочисленности длительностей p_j и дискретности потока платежей, достаточно рассмотреть расписания с целыми s_j. Обозначим через $N_t = \{j \in V \mid s_j \leq t < s_j + p_j\}$ множество работ, выполняемых в интервале $[t, t+1)$, $t \in Z^+$. Расписание S называется допустимым, если:

• сохраняется заданный частичный порядок выполнения работ

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad (i,j) \in E;$$

• в каждый момент времени с учетом реинвестирования дохода и размещения свободного капитала под ставку r_0 финансовых ресурсов достаточно для выполнения работ проекта

$$\sum_{t=0}^{t^*} \frac{K(t)}{(1+r_0)^t} + \sum_{t=0}^{t^*} \sum_{j \in N_t} \frac{c_j(t-s_j)}{(1+r_0)^t} \geq 0, \quad t^* = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Требуется определить допустимое расписание выполнения работ, при котором общая приведенная прибыль будет максимальной. Чтобы просуммировать прибыль от всех работ, требуется величины NPV_j привести к моменту времени $t = 0$. Тогда целевая функция будет выглядеть следующим образом

$$NPV(S) = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1+r_0)^{s_j}} \to \max_S .$$

Задача со складируемыми ресурсами и критерием общего времени завершения работ проекта является полиномиально разрешимой [4]. Однако при наличии реинвестирования она становится NP-трудной в сильном смысле [5]. Задача с критерием чистой приведенной прибыли NP-трудна в сильном смысле даже при отсутствии реинвестирования дохода [6].

3. Модель задачи календарного планирования проектов при возможности использования кредитов. Как правило, крупные инвестиционные проекты не удается выполнить за счет собственных средств. Поэтому широкое распространение получило использование кредитов. Кредитные инструменты достаточно разнообразны и обладают непростой структурой. При моделировании необходимо учитывать тип кредита, его размер, срок и так далее.

Одним из условий кредитования является обязательная выплата процентов за текущий год. Какую бы форму ни имел кредит, но на остаток основного долга начисляются проценты, и эти начисления должны быть погашены в текущем году. На следующий год вновь происходит начисление процентов на остаток основного долга. Схема работы любого кредита такова. Пусть D – размер кредита взятого на t лет, G_τ – размер выплат основного долга в год τ, F_τ — остаток основного долга на конец года τ. Очевидно, что $F_\tau = F_{\tau-1} - G_\tau$. Общий размер выплат в год τ составляет $R_\tau = G_\tau + F_{\tau-1} r$. В последний год должно быть выполнено условие $F_t = 0$.

Конкретная реализация этого потока платежей зависит от вида кредита. При $G_1 = G_2 = ... = G_t = F_0/t$ имеем кредит с постоянными выплатами основного долга, при $R_1 = R_2 = ... = R_t = const$ кредит называется аннуитетным. Есть и другие виды кредитов. Более того, кредитные организации могут пойти и на свободные выплаты

основного долга, но оплата процентов на остаток кредита обязательно должна быть произведена. Воспользуемся последним обстоятельством при построении модели задачи календарного планирования с использованием кредитов.

Любой кредит однозначно определяет поток платежей. Определим последовательность потоков платежей, которая задается следующей процедурой: по завершению года τ полностью возвращаем кредит вместе с начисленными процентами в объеме $(1+r)F_{\tau-1}$, а в начале следующего года оформляем новый кредит на сумму F_τ, чтобы соответствующая разность была равна платежу по исходному потоку.

Такой подход позволяет ввести только один дополнительный тип переменных $D(t)$ — размер кредита, взятого в год t, и ограничение по ресурсам примет следующий вид

$$\sum_{t=0}^{t^*}\left(\frac{K(t)}{(1+r_0)^t}+\sum_{j\in N_t}\frac{c_j(t-s_j)}{(1+r_0)^t}+\frac{D(t)-(1+r)D(t-1)}{(1+r_0)^t}\right)\geq 0,$$

а целевая функция равна

$$\sum_{j\in V}\frac{NPV_j}{(1+r_0)^{s_j}}-\sum_{t=0}^{T}\frac{D(t)-(1+r)D(t-1)}{(1+r_0)^t}\to\max_{S,\{D(t)\}},$$

где T — горизонт планирования проекта, $D(-1)=0$ и $D(T)=0$.

4. Риски инвестиционных проектов. Одной из важных составляющих инвестиционного проектирования является понятие риска. Несмотря на многочисленные работы по исследованию рисков, для задач календарного планирования производственных инвестиционных проектов эта тема проработана недостаточно глубоко. Поэтому на данный момент актуальной является задача построения таких расписаний, которые обеспечивали бы не только максимальную прибыль, но и были бы устойчивыми к объему начального капитала, процентной ставке по кредиту, кризисным и некоторым другим процессам. Традиционно при неопределенности дохода рассматривается мультимодальная модель проекта, когда для каждой работы задается несколько вариантов ее выполнения и расчеты проводятся для нескольких сценариев. В [7,8] предлагается несколько иной подход к оценке рисков и надежности расписаний выполнения работ. Будем считать, что поступления от выполнения работ $c_j(\tau)$ — случайные величины с известными распределениями.

Что значит решить задачу календарного планирования при случайных поступлениях? Для ответа на этот вопрос определим характеристики, которые будут давать информацию об успешности того или иного расписания S. Прежде всего, необходимо построить вероятностное распределение итогового потока платежей в каждый момент времени. Сложение независимых случайных величин осуществляем стандартным способом. Расписание S будем оценивать по следующим параметрам:

$NPV(S)$ — математическое ожидание чистой приведенной прибыли проекта;

$D(S)$ — дисперсия прибыли проекта;

$P(S)$ — вероятность того, что ограничения по ресурсам в некоторый момент времени будут нарушены.

Эти параметры позволяют анализировать различные расписания с точки зрения не только прибыли, но и рисков.

С помощью такого подхода можно сравнивать расписания между собой, а также выяснять зависимость интересующих нас параметров расписания от входных данных. В процессе реализации алгоритма получаем исчерпывающую информацию

о распределениях. В данной постановке присутствует уже два критерия: прибыль и риск, который выражается дисперсией или вероятностью получения дохода определенного уровня для каждого расписания. В многокритериальной постановке приходится рассматривать Парето-оптимальное множество или полное множество альтернатив (ПМА). Для поиска ПМА удобно использовать упомянутые выше метаэвристики. С помощью такой технологии удается строить "более осторожные" расписания, причем прибыль проектов фактически не снижается.

Работа поддержана грантами целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 89-115.
2. Гимади Э.Х., Пузынина Н.М.Задача календарного планирования крупномасшабного проекта в условиях ограниченных ресурсов: опыт построения математического обеспечения // Управляемые системы. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. – Вып. 23. – С. 24-32.
3. Гимади Э.Х, Гончаров Е.Н, Залюбовский В.В., Пляскина Н.И., Харитонова В.Н. О программно-математическом обеспечении задачи ресурсно-календарного планирования Восточно-сибирского нефтегазового комплекса // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2010. – № 4. – С. 51-62.
4. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В. Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными срокам // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск, 2000. – Сер. 2. – Т. 7, № 1. – С. 9-34.
5. Gimadi E., Sevastianov S. On solvability of the project scheduling problem with accumulative resources of an arbitrary sign // Operations research Proceedings. – Springer, 2002. – P. 241-246.
6. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности задачи календарного планирования проектов // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2008. – Т. 8, Вып. 3. – С. 105-111.
7. Мартынова Е.А., Сервах В.В. Оценка надежности расписаний в задаче календарного планирования проектов // Сборник научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011. – Севастополь, 2011. – С. 229-231.
8. Гимади Э.Х, Моторина Н.Ю., Пляскина Н.И., Сервах В.В. Прибыль и риски при планировании инвестиционных проектов // Труды XV Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Т. 6: Математическая экономика. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 93-98.

© Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

КОРРЕКЦИЯ НЕСОБСТВЕННОСТИ И МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Д. Скарин

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — определенные на $\mathbb{R}^n$ выпуклые функции $(i = 0, 1, \dots, m)$.

В зависимости от пустоты или непустоты множеств X и $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \inf\limits_x\{L(x,\lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))\} > -\infty\}$ различают [1] три рода несобственных задач (НЗ) ВП: 1) $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$; 2) $X \ne \varnothing$, $\Lambda = \varnothing$; 3) $X = \varnothing$, $\Lambda = \varnothing$. Чаще встречаются и более исследованы задачи 1-го рода [1, 2]. Если в таких задачах заменить множество X на $X_\xi = \{x : f(x) \le \xi,\ \xi \ge 0\}$ так, чтобы $X_\xi \ne \varnothing$, то справедливо $\inf\{f_0(x) : x \in X_\xi\} > -\infty$.

Задаче (1) поставим в соответствие проблему (P_σ) нахождения седловых точек $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ регуляризованной функции Лагранжа $L_\sigma(x,\lambda) = L(x,\lambda) + \alpha\,\|x\|^2 - \beta\,\|\lambda\|^2$, $\sigma = [\alpha, \beta] > 0$, $\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы. В работе [2] для НЗ ВП 1-го рода была установлена тесная связь между задачами (P_σ),

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar\xi}\}, \qquad (= \bar f) \tag{2}$$

где $\bar\xi = \arg\min\{\|\xi\| : X_\xi \ne \varnothing\}$, и двойственной к (2).

Теорема 1 [2]. *Пусть функции $f_i(x)$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ в задаче* (1) *дифференцируемы и в точке $\bar x \in X_{\bar\xi}$ выполнены условия Куна–Таккера для задачи* (2) : *существует вектор $\bar\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ такой, что $\nabla_x L(\bar x, \bar\lambda) = 0$, $(\bar\lambda, f(\bar x) - \bar\xi) = 0$. Тогда справедливы оценки*:

$$\left.\begin{aligned} \|(f(x^\sigma) - \bar\xi)^+\| &\le \sqrt{\beta}\, C_1(\sigma), \\ |\, f_0(x^\sigma) - \bar f\,| &\le \max\{\alpha\,\|\bar x\|^2, \sqrt{\beta}\, C_1(\sigma)\,\|\bar\lambda\|\}, \\ \|\nabla_x L(x^\sigma, \lambda^\sigma)\| \le \sqrt{\alpha}\, C_2(\sigma), &\qquad 0 \le (\lambda^\sigma, f(x^\sigma) - \bar\xi) \le C_3(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $C_1(\sigma) = 2\,[\sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda\| + (\alpha\,\|\bar x\|^2 + \beta\,\|\bar\lambda\|^2)^{\frac12}]$, $C_2(\sigma) = 2[\alpha\|\bar x\|^2 + \sqrt{\beta} C_1(\sigma)\|\bar\lambda\|]^{\frac12}$, $C_3(\sigma) = \frac12 C_2^2(\sigma)$.

Данный подход к коррекции НЗ ВП тесно связан с известными [3] методами регуляризации некорректных задач оптимизации (методами Тихонова, квазирешений, невязки). Применение регуляризации вносит в процесс коррекции элемент универсальности в том плане, что позволяет сократить число анализируемых родов несобственности задач ВП.

В методе Тихонова наряду с (1) рассматривается следующая задача ВП

$$\min\{F_\gamma(x) = f_0(x) + \gamma\,\|x\|^2 : x \in X\}, \qquad \gamma > 0. \tag{4}$$

Функция Лагранжа для задачи (4) $L^\gamma(x,\lambda) = L(x,\lambda) + \gamma\,\|x\|^2$ сильно выпукла по x при $\gamma > 0$, поэтому $\Lambda_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \inf\limits_x L^\gamma(x,\lambda) > -\infty\} \ne \varnothing$ $(\forall\,\gamma > 0)$. Таким образом,

задача (4) может быть НЗ ВП только 1-го рода независимо от характера несобственности исходной задачи (1). Если в (1) $X = \varnothing$, то введем аналог аппроксимации (2) для задачи (4):

$$\min\{F_\gamma(x) : x \in X_{\bar\xi}\}. \tag{5}$$

Окончательно процесс коррекции задачи (1) на основе применения функции $L_\sigma(x,\lambda)$ с использованием метода Тихонова можно представить в виде последовательности задач

$$(1) \to (4) \to (5) \to (P_\sigma).$$

Пусть для задачи (5) в точке $[\bar x^\gamma, \bar\lambda^\gamma] \in X_{\bar\xi} \times \mathbb{R}^m_+$ выполнены условия Куна–Таккера: $\nabla_x L^\gamma(\bar x^\gamma, \bar\lambda^\gamma) = 0$, $(\bar\lambda^\gamma, f(\bar x^\gamma) - \bar\xi) = 0$. Тогда взаимосвязь между решениями задач (5) и (P_σ) будет выражаться оценками $(3)^\gamma$, получающимися из (3), в которых $f_0(x^\sigma)$, $\bar f$, $L(x^\sigma, \lambda^\sigma)$ надо заменить, соответственно, на $F_\gamma(x^\sigma)$, $\bar F_\gamma$, $L^\gamma(x^\sigma, \lambda^\sigma)$, где $\bar F_\gamma = F_\gamma(\bar x^\gamma)$, а выражения в правых частях оценок (3) $C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma)$ превратятся в $C_1^\gamma(\sigma), C_2^\gamma(\sigma), C_3^\gamma(\sigma)$ после замены $\bar x$ и $\bar\lambda$ на $\bar x^\gamma$ и $\bar\lambda^\gamma$. При этом вместо α в этих оценках можно взять $\alpha_1 = \alpha - \gamma$, считая $0 < \gamma < \alpha$.

Из оценок $(3)^\gamma$ следует, что $\lim\limits_{\gamma\to 0} \lim\limits_{\substack{\alpha_1\to 0\\ \beta\to 0}} F_\gamma(x^\sigma) = \bar f$.

Второй процесс, связанный с методом квазирешений, основывается на рассмотрении задачи

$$\min\{f_0(x) : x \in X \cap S_r\}, \tag{6}$$

где $S_r = \{x : \|x\|^2 \le r\}$, $r > 0$. Если в (1) $X = \varnothing$, т.е. (1) — НЗ ВП 1-го или 3-го рода, то несобственной будет и задача (6), причем только 1-го рода, поскольку $\inf\limits_{x\in S_r} L(x,\lambda) > -\infty$ $(\forall\,\lambda \ge 0,\ r > 0)$. Выберем $\bar\xi_r = \arg\min\{\|\xi\| : \xi \in E_r\}$, где $E_r = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ : X_\xi \cap S_r \ne \varnothing\}$. Сформулируем задачу

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar\xi_r} \cap S_r\}. \tag{7}$$

Процесс будет состоять в анализе последовательности задач

$$(1) \to (6) \to (7) \to (P^r_\sigma),$$

где (P^r_σ) — проблема нахождения седловых точек функции $L_\sigma(x,\lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$.

Пусть в точке $[\bar x_r, \bar\lambda_r]$ выполнены условия Куна–Таккера для задачи (7) (здесь $\bar x_r \in X_{\bar\xi_r} \cap S_r$, $\bar\lambda_r \in \mathbb{R}^m_+$). Сформулируем утверждение, аналогичное теореме 1, в котором обосновывается применимость данного способа коррекции НЗ ВП.

Теорема 2 [4]. *Пусть в задаче* (7) $\bar\xi_r \ne 0$ $(\forall\, r > 0)$. *Для любых* $\sigma > 0$, $r > 0$ *справедливы оценки*:

$$\|(f(x^\sigma_r) - \bar\xi_r)^+\| \le \sqrt{\beta}\, C_1(\sigma, r), \qquad |f_0(x^\sigma_r) - \bar f_r| \le C_2(\sigma, r),$$

$$-4\alpha\, r^2 \le (\nabla_x L(x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r), x - x^\sigma_r) \qquad (\forall\, x \in S_r),$$

$$0 < (\lambda^\sigma_r, f(x^\sigma_r) - \bar\xi_r) \le C_3(\sigma, r),$$

где $C_1(\sigma,r), C_2(\sigma,r), C_3(\sigma,r)$ *получаются, соответственно, из* $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma)$, $C_3(\sigma)$ *при замене* $\bar x$ *и* $\bar\lambda$ *на* $\bar x_r$ *и* $\bar\lambda_r$.

Следствие 1. *Если* $\sigma \to 0$, $\beta = o(\alpha)$, *то* $x_r^\sigma \to (\bar{x}_r)_0$, *где* $(\bar{x}_r)_0$ — *нормальное решение задачи* (7).

Третий подход к коррекции НЗ ВП связан с методом невязки и состоит в анализе задачи

$$\min\{\|x\|^2 : x \in X \cap M_\delta\}, \tag{8}$$

где $M_\delta = \{x : f_0(x) \le \delta\}$, δ — некоторый числовой параметр. Если для (8) выписать функцию Лагранжа $H(x,\lambda) = \|x\|^2 + (\lambda, f(x))$, то $\inf\limits_{x \in M_\delta} H(x,\lambda) > -\infty$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\delta > \inf\limits_x f_0(x)$. Поэтому (8) может быть НЗ ВП только 1-го рода.

Выберем $\bar{\xi}_\delta = \arg\min\{\|\xi\| : \xi \in E^\delta\}$, где $E^\delta = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ : X_\xi \cap M_\delta \ne \varnothing\}$. Сформулируем задачу

$$\min\{\|x\|^2 : x \in X_{\bar{\xi}_\delta} \cap M_\delta\}. \tag{9}$$

Построим процесс коррекции НЗ ВП следующим образом

$$(1) \to (8) \to (9) \to (P_\sigma^\delta),$$

где (P_σ^δ) — задача нахождения седловых точек функции $L_\sigma(x,\lambda)$ в области $M_\delta \times \mathbb{R}^m_+$.

Теорема 3. *Пусть функция Лагранжа для задачи* (9)

$$H_{\xi,\delta}(x,u,v) = \|x\|^2 + (u, f(x) - \bar{\xi}_\delta) + v(f_0(x) - \delta)$$

имеет седловую точку $[\tilde{x}_\delta, \tilde{u}_\delta, \tilde{v}_\delta]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+$, *при этом* $\tilde{v}_\delta > 0$, *параметр* α *функции* $L_\sigma(x,\lambda)$ *равен* α_0, *где* $\alpha_0 \tilde{v}_\delta > 1$. *Тогда*

$$\|(f(x_\delta^\sigma) - \bar{\xi}_\delta)^+\| \le \beta\, B_0(\delta); \qquad |\, f_0(x_\delta^\sigma) - \delta\,| \le \beta\, B_1(\delta); \qquad \|x_\delta^\sigma - \tilde{x}_\delta\| \le \sqrt{\beta} B_2(\delta),$$

где $B_0(\delta) = 2\,\alpha_0\,\|\tilde{u}_\delta\|, \qquad B_1(\delta) = \dfrac{2\alpha_0^2\,\|\tilde{u}_\delta\|^2}{\alpha_0 \tilde{v}_\delta - 1}, \qquad B_2(\delta) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\alpha_0}\,\|\tilde{u}_\delta\|.$

Из теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть* $\beta \to 0$. *Тогда*

$$f(x_\delta^\sigma) \to \bar{\xi}_\delta, \qquad f_0(x_\delta^\sigma) \to \delta, \qquad x_\delta^\sigma \to \tilde{x}_\delta.$$

Предположим, что множество $\bigcap\limits_{i=1}^m \{x : f_i(x) \le C\}$ ограничено для некоторого C. В этом случае (1) будет НЗ ВП 1-го рода. Тогда из теоремы 3 можно получить следующее утверждение.

Следствие 3. *Если* (1) — *НЗ ВП 1-го рода, то*

$$\lim_{\delta \to \bar{f}} \lim_{\beta \to 0} x_\delta^\sigma = \bar{x}_0,$$

где $\bar{f}$ *из* (2), $\bar{x}_0$ — *нормальное решение задачи* (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00273) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983.
2. Скарин В.Д. О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. ВУЗов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 81-88.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
4. Скарин В.Д. Об одном общем подходе к оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 265-275.

© Скарин Владимир Дмитриевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, Россия,
тел. (343) 375-34-23, факс (343) 374-25-81.
E-mail: skavd@imm.uran.ru

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СО СКРЫТОЙ НЕВЫПУКЛОЙ СТРУКТУРОЙ

А.С. Стрекаловский

1. Введение

Подавляющее большинство задач оптимизации, возникающих из практических приложений, оказываются в действительности невыпуклыми [1–3]. Как следствие, они обладают множеством (иногда громадным) локальных решений, которые далеки от глобального как по значению целевого функционала, так и по аргументу. Как следствие, классические методы оптимизации (методы спуска, ньютоновские, квазиньютоновские, SQP, IPM, TRM и т.д. [1, 2]) оказываются неэффективными с точки зрения поиска глобального решения, поскольку они попадают в «локальные ловушки» и не способны оттуда выбраться. Ярким примером таких задач являются, например, задачи математического моделирования процессов молекулярной динамики и предсказания биологических структур. Академическим примером таких задач могут служить и дискретные задачи оптимизации в их непрерывной постановке.

Необходимо обратить внимание на то, что практически все подобные задачи оперируют с функциями А.Д. Александрова (d.c. функциями) [4], которые представляются в виде разности двух выпуклых функций. Этот класс (DC) d.c. функций удивительным образом отражает реальный конфликт выпуклых и невыпуклых структур (регулярностей и сингулярностей), присутствующих в прикладной задаче.

К тому же, как известно, этот класс обладает несколькими замечательными особенностями, которые все больше привлекают внимание специалистов по вычислительной математике, исследующих сингулярности прикладных задач и использующих идеологию или методы оптимизации.

A) Множество $DC(\mathbb{R}^n)$ порождено наиболее исследованным классом функций — выпуклым конусом выпуклых функций и оказывается линейным пространством.

B) $DC(\mathbb{R}^n)$ содержит степенные и тригонометрические полиномы, а также пространство $C^2(\mathbb{R}^n)$.

C) Класс $DC(\mathbb{R}^n)$ замкнут относительно большинства известных операций вычислительной математики max, min, $\|\cdot\|$, линейной комбинации, и т.д.

D) Любая непрерывная функция на компакте из $\mathbb{R}^n$ может быть аппроксимирована с произвольной точностью посредством некоторой функции А.Д. Александрова.

Что касается методов решения невыпуклых задач оптимизации, можно констатировать доминирование таких популярных процедур как B&B, отсечения, генетических алгоритмов и т.д., которые по построению подвержены либо проклятию размерности, либо отсутствию какой-либо сходимости к решению.

С другой стороны, как уже упоминалось, классические методы оптимизации не в состоянии «выскочить» из локальной ямы в действительно невыпуклой задаче. Ниже будет рассмотрена одна альтернатива доминирующим подходам в невыпуклой оптимизации, позволяющая это сделать.

2. Примеры невыпуклых задач с явной и скрытой оптимизационной сингулярностью

2.1. Задачи с булевыми переменными

$$f(x) \downarrow \min, \quad x \in P \quad x \in \{0,1\}^n. \tag{1}$$

Включение $x_i \in \{0,1\}$ очевидно равносильно условиям

$$x_i^2 - x_i \geq 0, \; 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

суммируя первое из которых, имеем

$$h(x) \stackrel{\triangle}{=} \| \, x - \frac{e}{2} \, \|^2 - \frac{n}{4} \geq 0, \tag{2}$$

где $e = (1, \ldots, 1)^T \in I\!R^n$.

Тогда задача (1) записывается в «непрерывной» форме

$$\begin{gathered} f(x) \downarrow \min, \quad x \in S := P \cap \Pi, \\ h(x) \geq 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\Pi = \{x \in I\!R^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n.$

В предположении выпуклости функции $f(\cdot)$ и множества P задача (3) оказывается, тем не менее, невыпуклой, сингулярность которой определяется (обратновыпуклым) ограничением $h(x) \geq 0$, задаваемым выпуклой функцией $h(\cdot)$.

2.2. Минимизация энергии (потенциала) Леннард-Джонса

Невалентные ван-дер-ваальсовские взаимодействия между парами атомов, не связанных валентными связями, задаются в виде модифицированного потенциала Леннард-Джонса:

$$U_{vdw} = \sum_i \sum_{j>i} 4\varepsilon_{ij} \left[\left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^{6} \right], \tag{4}$$

где $r_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{3} (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}$ – расстояние между атомами $x^p = (x_{p1}, x_{p2}, x_{p2})$, $p = i, \; i = 1, \ldots, n$, а $\varepsilon_{ij}, \; \sigma_{ij}$ – константы взаимодействия.

При моделировании белков и нуклеиновых кислот задача заключается в выборе такого взаиморасположения атомов, при котором потенциальная энергия молекулы (некоторым приближением для которого является формула (модель) (4)) была минимальной.

Функция $f(x) = U_{vdw}(r_{ij})$, как нетрудно видеть, является не только невыпуклой, но и трудновычислимой, как и ее градиент, при $r_{ij} \downarrow 0$.

2.3. Линейная задача дополнительности

заключается в поиске пары векторов (x, w), таких что

$$Mx + q = w, \langle x, w \rangle = 0, x \geq 0, w \geq 0. \tag{5}$$

Поскольку в задаче всё линейно, то никаких невыпуклостей или сингулярностей не видно. Однако достаточно задачу рассмотреть в оптимизационной форме:

$$\left.\begin{array}{c}\langle x, Mx\rangle + \langle q, x\rangle \downarrow \min\limits_{x}, \\ x \geq 0, Mx + q \geq 0;\end{array}\right\} \tag{5'}$$

как становится ясно, что свойства задачи (5) определяются матрицей M, в случае знаконеопределенности которой задача (5′) оказывается невыпуклой [5].

2.4. Биматричные игры

Равновесие по Нэшу $(x_*, y_*) \in NE(A, B)$ в биматричной игре определяется следующим образом:

$$\left.\begin{array}{ll}\langle x_*, Ay_*\rangle \geq \langle x, Ay_*\rangle & \forall x \in X, \\ \langle x_*, By_*\rangle \geq \langle x_*, By\rangle & \forall y \in Y,\end{array}\right\} \tag{6}$$

где $X = S_m, Y = S_n$, $S_p = \{x \in I\!R^p \mid \sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 1, x \geq 0\}, \quad p = m, n.$

В этой задаче также не видно никаких сингулярностей, поскольку вновь всё линейно по каждой из переменных x и y. Однако нетрудно показать, что поиск равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(A, B)$ равносилен решению следующей задачи билинейного программирования:

$$\left.\begin{array}{l}\langle x, (A + B)y\rangle - \alpha - \beta \uparrow \max\limits_{(x,y,\alpha,\beta)}, \\ Ay - \beta e_m \leq 0_m,\ y \in Y,\ \beta \in I\!R, \\ xA - \alpha e_n \leq 0_n,\ x \in X,\ \alpha \in I\!R.\end{array}\right\} \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что целевая функция задачи (7) необязательно вогнута в зависимости от матриц A и B, а потому задача (7) невыпукла [6].

2.5. Задачи кластеризации, классификации и финансовой и медицинской диагностики

Такие задачи порождены приложениями в различных областях и чаще всего трактуются как задачи обобщенной отделимости, поскольку линейная отделимость места не имеет [7]. Так, например, два множества задаются матрицами $A = [a^1, ..., a^M]$, $B = [b^1, ..., b^N], a^i, b^j \in I\!R^n$. Тогда задачу о полиэдральной отделимости можно свести к минимизации невыпуклой недифференцируемой функции ошибки

$$F(V, \Gamma) = F_1(V, \Gamma) + F_2(V, \Gamma), \quad V = (v^p), \ \ \Gamma = (\gamma_p), \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l}F_1(V, \Gamma) = \frac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M} \max\{0, \max\limits_{1\leq p\leq P}(\langle a^i, v^p\rangle - \gamma_p + 1)\}, \\ F_2(V, \Gamma) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} \max\{0, \min\limits_{1\leq p\leq P}(\gamma_p + 1 - \langle b^j, v^p\rangle)\}.\end{array}\right\} \tag{9}$$

В этой задаче, на первый взгляд, не видно никаких особых сингулярностей, кроме недифференцируемости. Однако задача несомненно не может быть решена классическими методами оптимизации.

Обобщение теории глобального поиска на негладкий случай позволило разработать программный комплекс по решению негладких задач d.c. минимизации,

доказавший свою сравнительную эффективность на известном поле тестовых задач из литературы [8].

2.6. Иерархические задачи оптимизации

Возникающие в приложениях задачи оптимизации часто характеризуются многоуровневой структурой (принятия решений), когда результат действий нижних уровней зависит также от решений, принятых на верхних уровнях. Например, линейная двухуровневая задача оптимизации может иметь следующую форму (в оптимистической постановке):

$$\left.\begin{array}{c} \langle c, x\rangle + \langle c_1, y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y}, \\ Ax \le b, \quad x \ge 0, \\ y \in Y_*(x), \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{BP})$$

где $Y_*(x)$ — это множество решений задачи

$$\left.\begin{array}{c} \langle d, y\rangle \downarrow \min\limits_{y}, \\ A_1 x + B_1 y \le b_1, \quad y \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{FP})$$

При этом никаких невыпуклостей в задаче не усматривается. Несмотря на это, подобная сингулярность в задаче существует, что и затрудняет поиск решения [9].

2. Теория глобального поиска

Все вышепредставленные задачи, а также подавляющее большинство других невыпуклых задач являются подклассом задач d.c. программирования вида:

$$\left.\begin{array}{c} f_0(x) \downarrow \min\limits_{x}, \quad x \in S, \\ f_i(x) \le 0,\ i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ f_i(x) = 0,\ i \in E = \{m+1, \dots, p\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $f_i(x) = g_i(x) - h_i(x)$, $i \in I \cup E \cup \{0\}$.

Класс функций А.Д. Александрова (d.c. функции), как уже говорилось [3], образует линейное пространство, порожденное выпуклым конусом выпуклых функций, хорошо исследованных в литературе [2]. И в каждой части задачи $(\mathcal{P})$ — в целевой функции, в ограничениях — существует конфликт между выпуклой структурой («ангелом») задачи (заданной скажем в целевой функции $f_0(\cdot)$ функцией $g_0(\cdot)$) и антивыпуклой («демоном», «дьяволом») структурой (заданной функцией $h_0(\cdot)$). В ограничениях типа равенства этот конфликт, очевидно, еще сложнее.

Взаимодействие этих структур («игра» между «ангелами» и «демонами») придает таким задачам неимоверную сложность при их теоретическом исследовании и, конечно, при практическом решении таких задач. Самое главное в том, что современный математический аппарат (теория экстремума, методы оптимизации и т.д.) не приспособлен к решению подавляющего числа прикладных задач, и как следствие, оказывается неэффективным глобальным решателем.

Разработанная нами *теория глобального поиска* [3, 5–11]

а) не отвергает достижения и методы современнной выпуклой оптимизации, а, наоборот, активно их использует для решения невыпуклых задач (скажем, «внутри» локального поиска);

b) предлагает процедуры, позволяющие не только «выпрыгивать» из локальных ям, но и достигать глобального решения в невыпуклых задачах;

c) при этом эффективность процедур глобального поиска в сильной степени зависит от эффективности методов выпуклой оптимизации, используемых «внутри» этих процедур.

Работа частично поддержана междисциплинарным интеграционным проектом фундаментальных исследований СО РАН № 141.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. – New-York: Springer, 2006.
2. Bonnans J.F., Gilbert J.Ch., Lemaréchal C., Sagastizabal C. Numerical optimization. Theoretical and practical aspects. – Berlin: Springer-Verlag, 2003.
3. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003.
4. Александров А.Д. Поверхности, представимые разностями выпуклых функций // Доклады Академии Наук СССР. – 1950. – Т. 72, № 4. – С. 613-616.
5. Мазуркевич Е.О., Петрова Е.Г., Стрекаловский А.С. О численном решении линейной задачи дополнительности // ЖВМ и МФ. – 2009. – Т. 49, № 8. – С. 1385-1398.
6. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. — М.: ФИЗМАЛИТ, 2007.
7. Mangasarian O.L. Linear and Nonlinear Separation of Patterns by Linear Programming // Operations Research. – 1965. – № 13. – P. 444-452.
8. Груздева Т.В., Орлов А.В., Стрекаловский А.С., Дружинина О.В. Негладкие задачи минимизации разности двух выпуклых функций // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – Т. 12, № 2. – С. 139-151.
9. Strekalovsky A.S., Orlov A.V, Malyshev A.V. On computational search for optimistic solutions in bilevel problems // Journal of Global Optimization. – 2010. – Vol. 48, № 1. – P. 159-172.
10. Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48, № 7. – С. 1187-1201.
11. Стрекаловский А.С., Груздева Т.В. Локальный поиск в задачах с невыпуклыми ограничениями // ЖВМ и МФ. – 2007. — Т. 47, № 3. – С. 397-413.

© Стрекаловский Александр Сергеевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 45-30-31, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: strekal@icc.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕТОДОВ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

О.В. Хамисов

Общая постановка задачи, рассматриваемой в докладе, имеет следующий вид

$$f(x) \to \min_{x \in X}, \tag{1}$$

где $f : S \to \mathsf{R}$ — полунепрерывная снизу функция, $S \subset \mathsf{R}^n$ — открытое множество, $X \subset S$ — компактное множество. В такой постановке можно гарантировать лишь существование оптимального решения задачи (1) при условии $X \neq \emptyset$. Доклад посвящён исследованию методов решения задачи (1) при различных дополнительных предположениях относительно f и X.

Общая схема решения состоит, как обычно, в аппроксимации задачи (1) менее сложными вспомогательными задачами. При этом последовательность оптимальных решений вспомогательных задач должна обладать следующим свойством: каждая предельная точка этой последовательности есть точка глобального минимума задачи (1). Различные требования к вспомогательным задачам, гарантирующим данное свойство, разработаны достаточно подробно, так же как и общие схемы, в рамках которых эти требования выполняются [1],[4],[8].

При построении вспомогательных задач приходится исходить из возможности их эффективного численного решения. Стандартным образом предполагается, что в качестве вспомогательных используются задачи линейного или выпуклого программирования. С практической точки зрения задачи линейного программирования не представляют сложности (даже задачи с 100 000 000 переменных). Эффективность решения задач выпуклого программирования требует некоторого уточнения. В общей постановке (минимизация выпуклой функции на выпуклом множестве) число переменных может доходить до 1000 [3]. Если несколько сузить класс задач выпуклого программирования до задач, обладающих определённой структурой, позволяющей применять для их решения полиномиальные методы внутренних точек, то число переменных возрастает до 10 000 000 [3].

Если в задаче (1) X — выпуклое множество, то её аппроксимация задачами выпуклого программирования выглядит естественно, поскольку в этом случае, как известно, f можно заменить её выпуклой оболочкой над X и решать *эквивалентную* задачу выпуклого программирования. Конечно, выпуклую оболочку можно построить лишь в редких случаях, но сам факт теоретической эквивалентности задачи (1) задаче выпуклого программирования стимулирует усилия по поэтапному (приближённому) построению выпуклой оболочки с одновременным доказательством сходимости к глобальному минимуму. Ситуация меняется, если X — невыпуклое множество, например, целочисленная решётка многомерного политопа. Выпуклая оболочка допустимой области — снова политоп, и в случае нелинейности f глобальный минимум f на выпуклой оболочке может и не быть допустимой точкой, даже если f выпукла.

В докладе предлагается использовать в качестве вспомогательных также задачи невыпуклого программирования. Конечно, с теоретической точки зрения прогресса нет — **NP**-трудные задачи аппроксимируются снова **NP**-трудными задачами. Тем не менее, подходящий выбор вспомогательных задач позволяет получать неплохие *практические* результаты и основание для такого выбора довольно прагматическое — наличие хорошего решателя.

Как известно, в настоящее время существуют хорошие решатели задач частично-целочисленного линейного программирования. Рассмотрим примеры эффективного использования этих задач в качестве вспомогательных.

Пусть в задаче (1) $f(x) = x^T Qx + c^T x$ — невыпуклая квадратичная функция, $X = \{x \in \mathsf{R}^n : Ax \leq b\}$ — ограниченное многогранное множество. Тогда, используя необходимые условия оптимальности, данную задачу можно свести к задаче частичного 0-1 программирования, в которой кроме переменных x равноправное участие принимают переменные λ — множители Лагранжа. Использование "продвинутого" решателя даёт очень неплохие результаты на тестовых задачах, содержащих в исходной постановке до нескольких сотен переменных x [5]. Идейная основа такой редукции проста: записываются необходимые условия оптимальности, в которых все соотношения линейны, кроме соотношений дополняющей нежёсткости, которые введением вспомогательных 0-1 переменных [2] сводятся к линейным, содержащим эти самые 0-1 переменные. После несложных преобразований получаем смешанную 0-1 задачу ЛП. И всё-таки не все свойства исходной непрерывной постановки были использованы. Невостребованным оказался хорошо разработанный аппарат локального поиска. Предположим, что мы нашли стационарную точку при помощи какого-либо метода локального спуска. Переписав это решение в терминах задачи частичного 0-1 программирования, гарантированно получаем допустимую точку, что существенно для вычислительной эффективности применяемого 0-1 решателя. Далее, использование тривиального мультистарта нередко даёт точку глобального минимума (только нам об этом неизвестно). В этом случае последующее применение 0-1 решателя есть практическое доказательство глобальной оптимальности полученного решения.

Возможно следующее обобщение. Пусть в (1) f — дифференцируемая функция, X — множество, заданное системой равенств и неравенств с дифференцируемыми функциями в левых частях. Используя различные методы локального поиска, находим рекордное решение. Затем записываем необходимые условия оптимальности и, вводя дополнительные 0-1 переменные, избавляемся от условия дополняющей нежёсткости. В итоге получаем смешанную систему равенств и неравенств с непрерывными и дискретными переменными, для которой известна хотя бы одна допустимая точка. Далее формулируем задачу частично-дискретного программирования, состоящую в минимизации f на корнях этой системы. Часть доклада посвящена исследованию эффективности данного подхода для некоторых классов задач вида (1).

Предположим, теперь, что f в задаче (1) — квазивогнутая функция, а X — снова ограниченное многогранное множество. Глобальный минимум в такой задаче достигается в вершине X. Найдём некоторую вершину (что не представляет трудности). Используя ту или иную процедуру из [8] построим плоскость, отсекающую найденную вершину, и будем искать новую вершину X среди неотсечённых. Как было указано в [7], поиск новой неотсечённой вершины можно проводить, решая вспомогательную задачу линейного 0-1 программирования. Следовательно, располагая мощным 0-1 решателем, можно находить глобальный минимум в достаточно серьёзных задачах вогнутого программирования. Данный момент является ключевым, так как задача вогнутого программирования имеет принципиальное значение в глобальной оптимизации, сравнимое с важностью задачи линейного программирования в выпуклой оптимизации.

До сих пор мы говорили о применении методики целочисленного программирования в качестве вспомогательной для решения задач непрерывной глобальной оптимизации. Рассмотрим теперь обратное воздействие.

Применение теории и методов непрерывной оптимизации (в данном случае выпуклого программирования) в целочисленном программировании проиллюстрируем на примере построения нового типа отсечений. Пусть X — ограниченное многогранное множество, x^0 — его нецелочисленная вершина. Требуется построить плоскость, отсекающую x^0 и "сохраняющую" все целочисленные точки X. Как известно, данная задача давно решена и существует несколько типов так называемых правильных отсечений. Все они используют активные в x^0 линейные ограничения. Оказывается, можно построить новый тип глубоких отсечений, учитывающий влияние также и неактивных ограничений [6]. Построение такого типа отсечений основывается на решении сепарабельных задач выпуклого квадратичного программирования. Как показывает практика, в ряде случаев такие отсечения эффективны, в частности, при доказательстве того, что X не содержит целочисленных точек.

Использование штрафных функций даёт ещё одну возможность применения методов непрерывной оптимизации в дискретной. Предположим, что в задаче (1) компоненты вектора x должны принимать только целочисленные значения. Добавляя к целевой функции слагаемое вида $N \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin^2(\pi x_i)$ при достаточно большом N, можно при соответствующих требованиях, налагаемых на задачу (1), от задачи целочисленной оптимизации перейти к задаче непрерывной оптимизации. Здесь открываются широкие возможности для комбинирования стандартных методов локального поиска, методов непрерывной глобальной оптимизации и методов дискретной оптимизации. В частности, нетрудно показать, что штрафное слагаемое можно представить в виде разности двух выпуклых функций, т.е. представляет собой так называемую d.c. (difference convex) функцию. Это свойство даёт возможность применять хорошо разработанную методику d.c. оптимизации (например, использование выпуклых огибающих целевой функции и, как следствие, мощных методов выпуклого программирования) к исследуемой задаче. Можно вместо добавления штрафного слагаемого к целевой функции ввести ограничения $\sin(\pi x_i) = 0, i = 1, \ldots, n$ и снова использовать методы d.c. оптимизации. При таком подходе нет необходимости определять значение штрафного параметра N. В общем случае предлагается такая комбинация непрерывной и дикретной оптимизации. Как известно, методы непрерывной глобальной оптимизации, большинство из которых также, как и методы дискретной оптимизации, представляют собой различные реализации общей схемы ветвей и границ, особенно эффективны на первых итерациях: происходит достаточно существенное улучшение оценки глобального минимума снизу и из рассмотрения удаляются области, не содержащие точки глобального минимума. Далее эффективность непрерывной оптимизации снижается и разумно перейти к задаче дискретной оптимизации в исходной постановке. На практике часто проявляется следующий эффект методов непрерывной глобальной оптимизации. От 50 до 70% вычислительных усилий тратится на то, чтобы доказать, что найденное рекордное значение и есть точка глобального минимума. На взгляд автора, методы дискретной оптимизации справляются с задачей доказательства глобальной оптимальности лучше. Поэтому предварительное применение методов непрерывной оптимизации в задачах дискретной оптимизации можно рассматривать как локализацию области, содержащей оптимальное решение.

В докладе приводятся результаты исследования различных вычислительных схем, основанных на идеях, описанных выше. Кроме задач квадратичного и целочисленного программирования рассматриваются задачи обратно-выпуклого программирования, задачи с нецелочисленными дискретными переменными. Представлены результаты предварительных численных экспериментов на тестовых задачах и на некоторых прикладных задачах энергетики.

Работа поддержана совместным интеграционным проектом СО и УрО РАН “Теория и методы решения задач дискретной оптимизации и их применение в информационно-телекоммуникационных системах”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В.П. Методы погружения в задачах оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1977.
2. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969.
3. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
4. Норкин В.И. О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 7. – С. 992-1006.
5. Хамисов О.В. Численное решение специальных задач невыпуклого квадратичного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 1, 2005. – Т. 12, № 4. – С. 81-91.
6. Хамисов О.В. Построение глубоких отсечений в булевом программировании // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20-25 июня) / Под ред. Ю.И. Журавлёва. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2011. – С. 516-520.
7. Cabot A.V. Variations on cutting plane method for solving concave minimization problems with linear constraints // Naval Research Logistics. – 1974. – Vol. 21. – P. 265-274.
8. Horst R., Tuy H. Global Optimization. (Deterministic Approaches), 3rd, revised and enlarged edition. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

© Хамисов Олег Валерьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96.
E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

АЛГОРИТМЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ И МОНОТОННЫЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В.И. Шмырев

В докладе рассматривается дальнейшее развитие общего подхода [1,2] к построению конечных алгоритмов отыскания равновесных состояний в линейных моделях конкурентной экономики типа классической модели обмена и некоторых её обобщений. Изложение подхода ведется на примере нового алгоритм для модели производства-обмена [4,5], занимающей промежуточное положение между классической моделью обмена и вариантом модели Эрроу-Дебре.

Традиционно состояние равновесия рассматривается как баланс спроса и предложения товаров, что приводит к проблеме отыскания нулей функции избыточного спроса. Рассматриваемый подход [1,2] следует принципиально иному взгляду на равновесие. Равновесные цены задаются структурой планов производства и закупок товаров участниками подобно тому, как оптимальное решение задачи линейного программирования задается некоторым базисным набором используемых переменных. Каждая структура планов однозначно определяет два множества векторов цен – зону предпочтительности данной структуры и ее зону сбалансированности. Зона предпочтительности формируется из тех векторов цен, при которых закупки товаров произведены в соответствии с предпочтениями участников, хотя и без учета балансов по товарам. Зона сбалансированности, наоборот, состоит из векторов цен, при которых возможен финансовый баланс планов, но игнорируются предпочтения участников.

Равновесной является та из структур, для которой указанные множества имеют непустое пересечение. Координаты точки пересечения и отвечают равновесным ценам.

В результате возникает кусочно-постоянное отображение симплекса цен в себя, и искомый равновесный вектор цен является неподвижной точкой этого отображения.

Особенностью рассматриваемых моделей является то, что для них зоны предпочтительности и сбалансированности являются многогранниками. Вследствие этого отыскание неподвижной точки упомянутого кусочно-постоянного отображения приводит к задаче полиэдральной комплементарности, обобщающей известную задачу линейной комплементарности. Речь идет о рассмотрении двух полиэдральных комплексов, находящихся в отношении двойственности, и отыскании точки пересечения пары отвечающих друг другу полиэдров этих комплексов. Оказалось, что эта задача в исследуемых моделях обладает особым свойством монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными минорами матрицы задачи – известный класс P.

В случае некоторых моделей обмена с фиксированными бюджетами (модель обмена [3,7], обобщенная модель обмена [6,8]) возникающие точечно-множественные отображения оказываются потенциальными, т.е. задаются как субдифференциальные отображения для выпуклых функций. В этих случаях упомянутая монотонность принимает особенно простой вид (логарифмическая монотонность), что позволяет свести вопрос об отыскании равновесного вектора цен к задаче выпуклой оптимизации и воспользоваться идеей субоптимизации. Однако в общем случае монотонность имеет более сложный характер и приводит к обобщению монотонных кусочно-постоянных отображений на симплексе цен, в частности к специальному

классу задач линейной дополнительности.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00667-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 286, № 5. – С. 1062-1066.
2. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, № 2. – С. 163-175.
3. Шмырев В.И. Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. XI, № 34(2). – С. 139-154.
4. Шмырев В.И. Линейная модель производства-обмена. Полиэдральные комплексы и признак равновесия // Сиб. журн. индустр. математики. – 2011. – Т. XIV, № 2(46). – С. 124-131.
5. Шмырев В.И. Метод встречных траекторий для линейной модели производства-обмена // Сиб. журн. индустр. математики, 2011. – Т. XIV, № 4(48). – С. 136-147.
6. Шмырёв В.И. Обобщённая линейная модель обмена // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2, 2006. – Т. 13, № 2. – С. 74-102.
7. Shmyrev V.I. An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // Russian contributions to game theory and equilibrium theory. – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 2006. – P. 217-235.
8. Shmyrev V.I. A generalized linear exchange model // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2008. – Vol. 2, №1. – P. 125-142.

© Шмырев Вадим Иванович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН.
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-32, факс (383) 333-25-98.
E-mail: shvi@math.nsc.ru

ЗАДАЧА ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В УСЛОВИЯХ ОЖИДАНИЯ КРИЗИСА

К.С. Абакумов, В.В. Сервах

Имеется капитал в объеме K и возможность его инвестирования в n различных проектов. Для реализации проекта i необходимы капиталовложения в размере k_i. Доходность проекта является случайной величиной ξ_i с математическим ожиданием m_i. Задана матрица ковариаций, в которой элемент v_{ij} определяет зависимость между проектами i и j, $i, j = 1, 2, ..., n$. Портфелем будем называть подмножество проектов, выбранных для инвестирования. Требуется сформировать портфель с максимальным доходом и минимальным риском при условии, что суммарные вложения не превосходят K. Включенные в портфель проекты финансируются полностью.

Данная задача является NP-трудной в сильном смысле. Для построения Парето-оптимального решения задачи в случае линейной зависимости дохода от фиксированного числа параметров был разработан алгоритм динамического программирования. В общем случае использовались малотрудоемкие градиентные схемы с различными вариантами окрестностей [1].

Рассматриваемая модель учитывает зависимости проектов между собой и риск сокращается за счет диверсификации вложений. Включение в портфель проектов с отрицательной корреляцией означает, что падение дохода по одному проекту компенсируется его ростом по второму. В результате этого уменьшается дисперсия дохода портфеля, а, следовательно, и его риск. В период кризиса диверсификация играет меньшую роль, так как падение дохода происходит по всем проектам одновременно. Это требует доработки модели и алгоритмов. Вводится вероятность наступления кризиса p и величина дохода по каждому проекту l_i при его наступлении. Описан алгоритм расчета прибыли и риска в этом случае. Расчеты показали, что формируемый портфель при возможности кризиса становится более консервативным, и доля капитала, размещаемая в малодоходные, но безрисковые активы, увеличивается.

Работа поддержана грантом целевой программы СО РАН (проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абакумов К.С., Сервах В.В. Алгоритмы решения дискретной задачи выбора инвестиционных проектов // Материалы XIV Всероссийской конференции “Математическое программирование и приложения”, Екатеринбург, 2011. – С. 70.

© Абакумов Константин Сергеевич,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: st.falcon@mail.ru

© Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ

А.В. Адельшин, А.К. Кучин

Рассматривается смешанная задача максимальной выполнимости логической формулы, заданной в конъюнктивной нормальной форме, т.е. представляющей собой конъюнкцию скобок C_i, $i = 1, \ldots, m$, и D_k, $k = 1, \ldots, l$, где каждая скобка – дизъюнкция логических переменных или их отрицаний. Пусть каждой скобке C_i соответствует некоторый неотрицательный вес w_i. Задача заключается в том, чтобы найти такой набор значений переменных, при котором все скобки D_k будут истинными, а суммарный вес истинных скобок C_i будет наибольшим. Модель целочисленного линейного программирования для этой задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i z_i \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j \in C_i^-} x_j - \sum_{j \in C_i^+} x_j + z_i \le |C_i^-|, \ i = 1, \ldots, m; \tag{2}$$

$$\sum_{j \in D_k^-} x_j - \sum_{j \in D_k^+} x_j \le |D_k^-| - 1, \ i = 1, \ldots, l; \tag{3}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \ z_i \in \{0, 1\}, \ j = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где C_i^- и C_i^+ – множества индексов переменных, входящих в скобку C_i с отрицанием и без него соответственно. Множества D_k^- и D_k^+ определяются аналогично.

В данной работе предложена схема алгоритмов точного решения указанной задачи, основанная на композиции алгоритмов двух видов: алгоритмов решения задачи выполнимости для ограничений D_k, $k = 1, \ldots, l$, и алгоритмов решения задачи максимальной выполнимости для ограничений C_i, $i = 1, \ldots, m$. При разработке использовались алгоритмы ветвей и границ и перебора L-классов, описанные в [1,2]. Предложенные алгоритмы реализованы, проведен вычислительный эксперимент на сериях задач из специализированных библиотек.

Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00598.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Адельшин А.В., Ягофарова Д.И. Алгоритмы лексикографического перебора для решения задачи выполнимости и некоторых ее обобщений // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара. – 2005. – Т. 1. – С. 503-508.

2. Chen J., Kanj I. Improved exact algorithms for MAX-SAT // Discrete Applied Mathematics, Springer, 2002. – P. 341-355.

© Адельшин Александр Владимирович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: adelshin@ofim.oscsbras.ru

© Кучин Андрей Константинович, СОАО “ВСК”,
ул. Красина, 6, Омск, 644043, Россия, тел. (3812) 27-55-25.
E-mail: dommoi@yandex.ru

ОДИН ТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ $(r|p)$-ЦЕНТРОИДЕ

Е.В. Алексеева

В работе рассматривается дискретная задача об $(r|p)$-центроиде. Два игрока, Лидер и Конкурент, по очереди открывают p и r предприятий соответственно из заданного конечного множества. Каждый из игроков стремится максимизировать собственный доход, который он получает от обслуживания клиентов. Каждый клиент обслуживается из ближайшего открытого предприятия. Задача заключается в том, чтобы выбрать p предприятий Лидера, доставляющих ему максимальный доход. Известно, что задача является Σ_2^P-трудной [2], т. е. более трудной, чем любая NP-полная задача, если классы P и NP не совпадают.

Существует несколько формулировок этой задачи в терминах целочисленного линейного программирования [1, 3]. В настоящей работе предлагается новая улучшенная схема точного метода, основанная на формулировке из [3]. Эта формулировка содержит полиномиальное число переменных и экспоненциальное число ограничений. Кроме того, для этой формулировки известны правильные неравенства [3]. В данной работе их использование приводит к существенному уменьшению времени счета и уточнению верхней оценки, получаемой методами локального поиска.

Вычислительные эксперименты проводились на тестовых примерах из электронной библиотеки «Дискретные задачи размещения» [4]. Задачи размерности 100 клиентов, 100 предприятий, $p = r = 5, 10, 15$, удалось точно решить за меньшее время по сравнению с другими известными на сегодняшний день алгоритмами.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00474.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseeva E., Kochetova N., Kochetov Y., Plyasunov A. Heuristic and exact methods for the discrete (r, p)-centroid problem // Cowling P., Merz P. EvoCOP 2010, Lecture Notes in Computer Science, 2010. – P. 11-22.
2. Noltermeier H., Spoerhose J., Wirth H. Multiple voting location and single voting location on trees // Eur. J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 181. – P. 654-667.
3. Roboredo M.C., Pessoa A.A. A branch-and-cut algorithm for the discrete $(r|p)$-centroid problem // Eur. J. of Oper. Res. (в печати)
4. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Competitive/p_me_comp_eng.html.

© Алексеева Екатерина Вячеславовна,
Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: ekaterina2@math.nsc.ru

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

М.А. Алехина, И.А. Сиротин, Д.А. Лазарев

Пусть B_k – множество всех булевых функций, зависящих от k ($k \geq 2$) переменных $x_1, ..., x_k$, B – полный базис, $B \subseteq B_k$.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе B. Считаем, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Число входов функциональных элементов равно числу существенных переменных функций, приписанных этим элементам, то есть в рассматриваемом базисе каждый функциональный элемент имеет не более k входов. Предполагается, что каждый вход элемента схемы независимо от всех других входов элементов с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$) подвержен инверсным неисправностям. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a ($a \in \{0, 1\}$) с вероятностью ε может превратиться в значение $\bar{a}$. Заметим, что элементы, реализующие константы 0 и 1, являются абсолютно надежными при инверсных неисправностях на входах элементов.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S равна $\max\{P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}$ схемы S.

Теорема 1. *В базисе $B \subseteq B_k$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой S, что при всех $\varepsilon \in (0, 1/(960k)]$ верно неравенство $P(S) \leq 24k\varepsilon$.*

Таким образом, в произвольном полном конечном базисе при инверсных неисправностях на входах элементов любую функцию можно реализовать надежной схемой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 11-01-00212а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алехина М.А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем. – Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006.

© Алехина Марина Анатольевна, Сиротин Иван Александрович,
Лазарев Денис Алексеевич,
Пензенский государственный университет,
ул. Красная, 40, Пенза, 440026, Россия, тел. (8412)-36-80-68.
E-mail: alehina@pnzgu.ru, dm@pnzgu.ru

МОНИТОРИНГ ПОЛОСЫ С ВНЕШНИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ СЕНСОРНЫХ ДАТЧИКОВ

С.Н. Астраков

Рассматриваются модели мониторинга полосы заданной ширины при помощи сенсорных сетей, которые представляются круговыми покрытиями. Каждый круг покрытия является областью действия сенсора, находящегося в центре. Решается задача нахождения наименее плотного покрытия полосы кругами одного двух и трех радиусов действия. Специальным требованием для покрытия является то, что центры кругов не должны находиться внутри полосы (внешний мониторинг). В процессе исследования было показано, что с каждой моделью внешнего мониторинга полосы однозначно связана модель покрытия плоскости. Она получается многократным зеркальным отражением относительно границы полосы. Это означает, что поиск оптимальных вариантов внешнего покрытия полосы можно искать среди известных эффективных покрытий плоскости.

Предложены различные эффективные модели покрытий и определены их характеристики. Вообще говоря, положительным свойством модели является не только наименьшая плотность покрытия, но и простота структуры расположения сенсоров. При выборе модели для практической реализации возможны альтернативные варианты. В связи с этим проведен сравнительный анализ, и представлена сводная таблица моделей.

Полученные результаты являются продолжением исследований, представленных в работах [1,2]. Однако, существенным отличием является то, что в данной работе предложена новая классификация регулярных покрытий. Классификация позволяет находить эффективные модели при рассмотрении стандартных плиток регулярного покрытия. Она дает гарантию того, что какой-либо приемлемый вариант покрытия не будет пропущен.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-92650-IND-a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – № 3. – С. 3-19.
2. Erzin A., Astrakov S. Min-Density Stripe Covering and Applications in Sensor Networks // Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011. – ICCSA, Part III, LNCS. – P. 152-162.

© Астраков Сергей Николаевич,
Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
ул. Академика Ржанова, 6, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-37-94, факс (383) 330-93-61.
E-mail: astrakov90@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ МАЛЫХ ГРУПП С УЧЁТОМ УСЛОВИЯ КОМФОРТНОСТИ ОТНОШЕНИЙ

Л.Д. Афанасьева

В [1, 2] рассматривались задачи формирования малых групп с учётом межличностных отношений. В частности, изучалась следующая постановка задачи. Предположим, что имеется множество специалистов, являющихся претендентами для включения в малую группу. Между ними существуют отношения двух типов – комфортные и напряженные. Необходимо сформировать указанную группу так, чтобы число комфортных отношений между её членами было максимальным, а количество специалистов в ней не превышало заданного числа.

Перейдём к постановке задачи на графе. Дан граф G с множеством вершин $V = \{1, ..., n\}$ и множеством ребер $E \subseteq \{(i, j)| \ \ i, j = \overline{1, n}, \ \ i \neq j\}$. Вершины графа соответствуют специалистам, а ребра – отношениям между ними, т.е. $E = E_1 \cup E_2$:

1) E_1 – множество ребер, отражающих комфортные отношения между людьми,

2) E_2 – множество ребер, отвечающих напряженным отношениям.

Задача оптимизации заключается в отыскании подграфа G' графа G, который не содержит ребер из E_2 и включает максимальное число ребер из E_1, при этом число вершин в подграфе G' ограничено заданным числом.

Доказана NP-трудность задачи, построена и исследована модель целочисленного линейного программирования [2].

В [2] был предложен и апробирован алгоритм ветвей и границ точного решения этой задачи, основанный на решении достаточно простых задач на графах. В данной работе представлен новый вариант алгоритма аналогичного типа, обладающий меньшей трудоёмкостью.

Проведено экспериментальное исследование по сравнению и анализу указанных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Бушинский С.Д., Шулепова Л.Д. Формирование производственных групп с использованием дискретной оптимизации // Проблемы оптимизации сложных систем : матер. Шестой азиатской межд. школы-семинара, 2010. – С. 220-224.

2. Колоколов А.А., Серышева Ю.С., Шулепова Л.Д. Решение задач формирования малых групп с учётом межличностных отношений // Методы оптимизациии их приложения : тр. XV Байкальской международной школы-семинара. Т. 5. Прикладные задачи. – Иркутск : РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 61-66.

© Афанасьева Любовь Дмитриевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: lubovshulepova@gmail.com

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С МИНИМАЛЬНО ДОПУСТИМЫМИ РАССТОЯНИЯМИ

Е.А. Бельц

Продолжается исследование задачи оптимального размещения предприятий с учётом минимально допустимых расстояний между ними [1,2]. Задача состоит в следующем. Предположим, что имеется список предприятий нескольких типов и конечное множество пунктов возможного их размещения. В любом пункте разрешается расположить не более одного предприятия. Известны максимально возможное количество открываемых предприятий каждого типа, минимально допустимые расстояния между размещенными предприятиями и эффективность деятельности любого предприятия в указанных пунктах. Требуется найти размещение предприятий с учётом сформулированных выше условий и с максимальной суммарной эффективностью. Построена и исследована модель целочисленного линейного программирования [1].

Для этой задачи ранее были предложены алгоритм ветвей и границ, эвристические процедуры [1,2]. В данной работе представлен новый гибридный алгоритм для получения точного решения задачи, идея которого состоит в том, чтобы на каждой итерации алгоритма к текущей задаче линейного программирования (ЛП) добавлять нарушенные линейные ограничения (одно или несколько отсечений) на минимально допустимые расстояния.

Схема гибридного алгоритма.

Шаг 0. Пусть текущая задача ЛП – исходная задача без учета ограничений на минимально допустимые расстояния.

Шаг 1. Находим оптимальное целочисленное решение текущей задачи ЛП.

Шаг 2. Если для полученного решения на шаге 1 нарушены ограничения на минимально допустимые расстояния, то выбираем и добавляем некоторые из них к текущей задаче ЛП и переходим на шаг 1. Иначе переходим на шаг 3.

Шаг 3. Процесс завершен: последнее полученное решение текущей задачи ЛП является оптимальным решением исходной задачи.

В рамках данной схемы был реализован алгоритм и проведен вычислительный эксперимент для сравнения результатов с указанными выше алгоритмами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельц Е.А., Колоколов А.А. О решении одной задачи размещения предприятий с ограничениями на минимально допустимые расстояния // Труды XV Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск, 2011. – Т. 4. – С. 42-47.

2. Бельц Е.А. Разработка алгоритмов для решения одной задачи размещения предприятий // Труды научно-практической студ. конференции “Молодежь III тысячелетия”. – Омск, 2010. – С. 11-14.

© Бельц Елена Андреевна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: BelcElena@yandex.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ЦИКЛА ПРИ ОДНОВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКЕ НЕ БОЛЕЕ ДВУХ ДЕТАЛЕЙ

Е.А. Боброва, В.В. Сервах

Требуется обработать N однотипных деталей на производственной линии, состоящей из m машин. Обработка детали заключается в последовательном выполнении n операций $O_1 \to O_2 \to \ldots \to O_n$. Операция O_i выполняется на машине m_i в течение p_i единиц времени ($i = 1, 2, \ldots, n$). Машины в технологическом порядке могут повторяться. Одновременное выполнение двух и более операций на одной машине не допускается. Прерывания операций запрещены.

Обозначим через s_{ij} начало выполнения операции i детали j. Расписание $\{s_{ij}\}$ называется *циклическим*, если для любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, N$ выполняется $s_{ij} = s_{i1} + C(j-1)$, где C – длина цикла или циклическое время. Задача минимизации циклического времени полиномиально разрешима, и длина цикла равна сумме длительностей операций на самой загруженной машине. Однако, при таком расписании возникают простои между операциями, требуется дополнительная транспортировка и промежуточное хранение незавершенных деталей. Как альтернативный вариант, рассматривается постановка, в которой число одновременно находящихся в обработке деталей ограничено некоторой величиной H.

При произвольном H задача NP-трудна в сильном смысле. В [1] предложен алгоритм трудоемкости $O(P^{2H-1})$, где P – суммарная длительность всех операций одной детали. При фиксированном H алгоритм является псевдополиномиальным. В [2] для случая $H = 2$ был предложен полиномиальный алгоритм построения оптимального расписания. В данной работе представлена схема реализации этого алгоритма, написана соответствующая программа, с помощью которой проведено экспериментальное исследование свойств циклических расписаний.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романова А.А., Сервах В.В. Оптимизация выпуска однотипных деталей на основе циклических расписаний // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск, 2008. – Т. 15, № 5. – С. 47-60.

2. Боброва Е.А., Сервах В.В. Полиномиальный алгоритм минимизации времени цикла при одновременной обработке не более двух деталей // Труды XV Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Т. 4: Дискретная оптимизация. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 48-53.

© Боброва Екатерина Александровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 21-33-07.
E-mail: eabobrova88@gmail.com

© Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ БАЛАНСИРОВКИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛИНИИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ МАШИНАМИ

П.А. Борисовский, К. Делорм, А. Долгий

Рассматривается задача проектирования производственной линии [1] для выполнения заданного набора операций по обработке однотипных деталей. Линия формируется в виде последовательности *рабочих станций*, каждая из которых состоит из одной или нескольких идентичных параллельных *машин*. Время обработки детали машиной включает в себя длительности выполняемых операций, а также длительности переналадок, необходимых при переключении машины с одной операции на другую. Данное время, деленное на количество машин, установленных на станции, определяет *время такта* этой станции.

Необходимо сформировать линию так, чтобы каждая операция была назначена на одну из рабочих станций, и время такта каждой станции не превышало допустимого предела. Дополнительно могут быть заданы условия предшествования операций; условия включений (исключений), т.е. некоторые операции должны (соответственно, не могут) быть назначены вместе на одну и ту же станцию. Кроме того, для каждой станции должен существовать хотя бы один способ расположения детали, подходящий для всех операций этой станции (множества допустимых расположений для каждой операции заданы). Общее количество машин на линии должно быть минимальным.

Для решения задачи предложен и реализован генетический алгоритм с кодировкой решения в виде перестановки операций. Декодирование осуществляется с помощью эвристики жадного типа. В алгоритме также применяется процедура локального улучшения решений, в ходе которой решается задача целочисленного линейного программирования для формирования оптимальной линии при фиксированном порядке следования операций.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. Essafi, M., Delorme, X., Dolgui A., Guschinskaya O. A MIP approach for balancing transfer lines with complex industrial constraints // Computers & industrial engineering. – 2010. – Vol. 58. – P. 393-400.

© Борисовский Павел Александрович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: borisovski@mail.ru

© Delorme Xavier, Dolgui Alexandre,
LIMOS UMR CNRS 6158, Ecole des Mines de Saint-Etienne,
158, cours Fauriel, 42023 Saint-Etienne Cedex 2, France.
E-mail: delorme@emse.fr, dolgui@emse.fr

ПОИСК РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С УЧЕТОМ РАЗМЕЩЕНИЯ ГРУЗОВ НА ОСНОВЕ РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА

Е.М. Бронштейн, Н.А. Гильманова

Рассматривается задача построения маршрутов следования транспортных средств (ТС) с трёхмерным размещением грузов (3L-CVRP), заключающаяся в поиске набора маршрутов для ТС, которые должны доставить клиентам грузы в контейнерах. Помимо минимизации издержек на перевозку, требуется определить схемы загрузки контейнеров в каждое ТС. Задача 3L-CVRP может быть сформулирована как задача разбиения множества пунктов-клиентов на зоны, каждая из которых обслуживается одним ТС. Такая формулировка задач маршрутизации, как правило, малоэффективна из-за большого числа допустимых маршрутов. Предлагаемая постановка задачи включает ряд условий, существенно снижающих число допустимых маршрутов.

1. Ограничение массы перевозимого груза (не более грузоподъемности ТС); числа пунктов, включаемых в один маршрут; длины одного маршрута.
2. Условия на схему размещения грузов внутри ТС, в частности:
   (a) Неперекрытие контейнеров между собой и с гранями ТС;
   (b) Учет допустимости ориентации каждого контейнера;
   (c) Запрет на установку нехрупких контейнеров над хрупкими;
   (d) Устойчивость размещения грузов (предлагается новая формулировка ограничения, учитывающая положение центров тяжести контейнеров);
   (e) Соблюдение порядка погрузки-разгрузки контейнеров в соответствии с маршрутом ТС.

Для формирования множества допустимых маршрутов могут использоваться различные методы: полный перебор всех подмножеств и перестановок клиентов (для задач невысокой размерности), перебор при ограничении длины маршрутов и количества обслуживаемых по маршруту клиентов, использование эвристик, в частности, трехфазовой декомпозиции [1]. Затем решается задача разбиения множества клиентов; результатом является набор маршрутов, обеспечивающий доставку грузов всем клиентам с минимальными транспортными издержками. Численные эксперименты подтверждают эффективность подхода на основе разбиения множества клиентов как для решения задач невысокой размерности, так и для улучшения решений, найденных при эвристическом поиске [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-06-00001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппова А.С., Гильманова Н.А., Карипов У.А. Эвристический поиск решения в задаче маршрутизации с трехмерным размещением грузов // Материалы IV Всероссийской конференции “Проблемы оптимизации и экономические приложения”. – Омск, 2009. – С. 172.

© Бронштейн Ефим Михайлович, Гильманова Надежда Александровна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: bro-efim@yandex.ru, hopediesthelast@yahoo.com

АЛГОРИТМЫ ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ СИМВОЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.В. Бураков

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) используются во многих областях науки. ОДУ решают аналитически или численно (особенно на практике). Каждый из методов имеет слабые стороны. Аналитически можно решить далеко не каждое ОДУ, при численном решении результатом является числовая таблица.

Предлагается использовать алгоритм генетического программирования (ГП) для получения символьных решений, при этом предполагается, что задано ОДУ в общем виде и условия (начальные или граничные). Возможны два варианта решения [1]. Первый вариант – прямой метод – предполагает оценку решения, исходя из ОДУ и начальных условий. Второй вариант (гибридный) возможен при решении ОДУ численно, после чего находится символьная функция, аппроксимирующая полученную числовую функцию, при этом ОДУ и начальные условия не учитываются. Упрощенно схему алгоритма можно представить состоящей из следующих основных шагов:

1. Инициализация начальной популяции (случайно).
2. Оценка пригодности каждого индивида.
3. Адаптация индивидов.
4. Применение генетических операторов для получения новой популяции.
5. Если критерий остановки не выполнен – переход к шагу 2.

На первом шаге создаются бинарные деревья, представляющие решения ОДУ. На втором этапе решения оцениваются (исходя из ОДУ, начальных условий, сложности решения). На третьем этапе решения меняются, с целью улучшения оценки решения (используя один из методов оптимизации). На четвертом этапе применяюмся операторы селекции, рекомбинации, мутации. Циклическое выполнение этих шагов ведет к получению точного решения задачи.

Разработанные алгоритмы были апробированы на ряде задач. Полученные результаты показывают, что в большинстве случаев алгоритм ГП находит точные символьные решения поставленных задач. Нельзя сказать, что один из двух методов решения предпочтителен: прямой метод надежнее, точнее, а гибридный требует меньше ресурсов (не уступая при этом в точности для некоторых задач).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бураков С.В., Семенкин Е.С. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом генетического программирования // Журнал СФУ – “Математика и физика”. – 2011. – Том 4, Вып. 1. – С. 61-69.

© Бураков Сергей Васильевич,
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева,
пр-т им. газ. “Красноярский рабочий”, 31, Красноярск, 660014, Россия,
тел. (391) 262-95-96, факс (391) 264-47-09.
E-mail: burakov_krasu@mail.ru

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНЫХ ЗАВОЗОВ И ОГРАНИЧЕНИЙ НА ОБЪЕМЫ ПОСТАВОК

Н.И. Бурлакова, В.В. Сервах

Рассматривается однопродуктовая задача минимизации затрат на доставку и хранение продукции. За определенный период времени потребность в продукции составляет P единиц, λ – интенсивность ее потребления. Предприятие может приобретать продукцию у n поставщиков. Допускается многократный завоз продукции от поставщика $\imath$, при этом объем разовой поставки не может быть меньше $m_\imath$, а суммарный объем не превосходит $M_\imath$. Стоимость доставки продукции от поставщика $\imath$ в объеме υ определяется функцией $k_\imath(\upsilon) = \begin{cases} 0, \upsilon = 0 \\ \alpha_\imath + \beta_\imath \upsilon, \upsilon > 0 \end{cases}$ Удельные затраты на хранение единицы продукции на складе равны c_{xp}.

Необходимо для каждого поставщика $\imath = 1, 2, \ldots, n$ определить количество завозов $r_\imath$ и их объемы $x_{\imath\jmath}$, чтобы минимизировать общие затраты на доставку и хранение продукции $\sum\limits_{\imath=1}^{n}\sum\limits_{\jmath=1}^{r_\imath} k_\imath(x_{\imath\jmath}) + \sum\limits_{\imath=1}^{n}\sum\limits_{\jmath=1}^{r_\imath} \frac{x_{\imath\jmath}^2 c_{xp}}{2\lambda} \to \min$, при следующих условиях:

$$\sum_{\imath=1}^{n}\sum_{\jmath=1}^{r_\imath} x_{\imath\jmath} \geq P, \quad \sum_{\jmath=1}^{r_\imath} x_{\imath\jmath} \leq M_\imath, \quad x_{\imath\jmath} \in \{0\} \cup [m_\imath, M_\imath].$$

В [1] исследуется аналогичная задача без учета затрат на хранение продукции. В [2] затраты на хранение учитываются, но допускается только однократный завоз от каждого поставщика. В настоящей работе рассматривается постановка задачи с возможностью многократного завоза от каждого из поставщиков. Исследованы свойства задачи, построен псевдополиномиальный алгоритм ее решения.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122 и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев А.В., Романова А.А., Сервах В.В., Чаухан С.С. Приближенное решение одной задачи управления поставками // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2, 2006. – Т. 13, № 1. – С. 27-39.
2. Приз Н.И. Псевдополиномиальный алгоритм для задачи минимизации затрат на доставку и хранение продукции с несколькими поставщиками // Тезисы 41 Всероссийской молодежной конференции “Проблемы теоретической и прикладной математики”. – Екатеринбург, 2010. – С. 396-400.

© Бурлакова Наталия Игоревна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: surpriz87@yandex.ru

© Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕСТНИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАСКРОЯ

Ю.И. Валиахметова

Рассматриваются задачи ортогональной упаковки прямоугольных заготовок на листах. Для их решения используется лестничный алгоритм, основная идея которого состоит в многократном построении простых шаблонов. На каждом шаге определяется свободная область в частичной упаковке, и для нее генерируется *простой шаблон* [1]. Рассмотрим процедуру генерации простых шаблонов.

На первоначальном этапе заготовки сортируются по неубыванию значений оценочной функции $F_i = \lambda h_i + (1-\lambda)s_i, i = \overline{1,k}$, где h_i и s_i – высота и площадь i-ой заготовки соответственно, k – количество еще не упакованных заготовок, λ – весовой коэффициент, принимающий случайное значение из интервала [0,1], и заносятся в список π. Далее генерируется простой шаблон – прямоугольные заготовки составляются в свободную область, начиная с левого нижнего угла, все по порядку из списка π, пока шаблон не выходит за рамки свободной области. Перебирая различные значения λ, получаем множество шаблонов для одной и той же области, из которых выбирается лучший. Шаблон P со средней площадью $s(P)$ должен удовлетворять критерию достаточности $s(P) \geq s(I)$, где $s(I)$ – средняя площадь заготовок, входящих во множество I еще не упакованных заготовок. Сравнение шаблонов производится по следующим правилам: если оба шаблона удовлетворяют критерию достаточности, тогда шаблон с большей общей площадью считается лучше; если только один из двух шаблонов удовлетворяет критерию достаточности, то выбирается он (большая площадь игнорируется); если ни один шаблон условию достаточности не удовлетворяет, то выбирается тот шаблон, для которого отклонение $s(I) - s(P)$ меньше.

Алгоритм реализован программно. Численные эксперименты показывают высокую эффективность алгоритма. Ведутся разработки модификаций алгоритма для различных прикладных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Charalambous C., Fleszar K. A constructive bin-oriented heuristic for the two-dimensional bin packing problem with guillotine cuts // Computers and Operational Research. – 2011. – Vol. 38. – P. 1443-1451.

© Валиахметова Юлия Ильясовна,
Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50 лет Октября, 34, Уфа, 450001, Россия,
тел. +7 (347) 228-91-77, факс +7 (347) 228-08-98.
E-mail: julikas@inbox.ru

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОСТИ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О P-МЕДИАНЕ

И.Л. Васильев, Э. Каррицоса, А.В. Ушаков

Предположим, что задано множество пунктов возможного размещения предприятий $I = \{1, \ldots, m\}$, множество клиентов $J = \{1, \ldots, n\}$, величины d_{ij}, задающие транспортные затраты (расстояния) на обслуживание j-го клиента из пункта i, а также величины ω_j, задающие спрос j-го клиента. Задача о p-медиане заключается в выборе p пунктов размещения предприятий из множества I так, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были минимальны, т.е.

$$\min_{S \subseteq I} \Big\{ \sum_{j \in J} \omega_j \min_{i \in S} d_{ij} : \ |S| = p \Big\}.$$

Заметим, что в такого рода постановке задачи спрос каждого клиента предполагается заранее известным, однако это кажется нереалистичным при долгосрочном планировании. В [1] рассматривается случай, когда спрос клиента j точно не известен, но представлен некой прогнозируемой оценкой $\widehat{\omega}_j$. Для контролирования значения целевой функции введем величину $\tau > 0$, которую можно интерпретировать как бюджет, ограничивающий возможное максимальное значение целевой функции. В этом случае робастностью ρ решения S будем называть минимальное отклонение спроса относительно $\widehat{\omega}$, для которого суммарные затраты на обслуживание всех клиентов превышают пороговое значение (бюджет) τ , т.е.

$$\rho(S) = \min \Big\{ \|(\omega_j)_{j \in J} - (\widehat{\omega}_j)_{j \in J}\| : \sum_{j \in J} \omega_j \min_{i \in S} d_{ij} > \tau \Big\}, S \subseteq I, |S| = p. \qquad (1)$$

В работе рассматривается модификация задачи о p-медиане, в которой на решение накладывается дополнительное условие на робастность. Вводится целочисленная постановка такой задачи, а также обсуждаются некоторые возможные подходы к ее решению.

Данная работа частично поддержана интеграционным грантом СО РАН №21.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carrizosa E., Nickel S. Robust facility location // Mathematical Methods of Operations Research. – 2003. – Vol. 58, № 2. – P. 331-349.

© Васильев Игорь Леонидович, Ушаков Антон Владимирович,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952)453106, факс (3952)511616.
E-mail: vil@icc.ru, aushakov@icc.ru

© Каррицоса Эмилио,
Facultad de Matematicas, Universidad de Sevilla,
Avda Reina Mercedes s/n. 41012 Sevilla, Spain,
phone:+34 954557943, fax:+34 954550902.
E-mail: ecarrizosa@us.es

ОДНОУРОВНЕВЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧИ ОБ (r,p)-ЦЕНТРОИДЕ

И.Л. Васильев, К.Б. Климентова, Т.В. Малева

В работе исследуется, так называемая задача об (r,p)-центроиде, или конкурентная задача о p-медиане [1,2]. В такой задаче имеются две конкурирующих фирмы, которые стремятся захватить как можно бóльшую долю рынка, представленного множеством клиентов $J = \{1,\dots,n\}$. Одна из фирм, условно называемая Лидером, первой открывает $p \geq 1$ предприятий из списка возможных $I = \{1,\dots,m\}$. Обозначим выбор Лидера через $L \subseteq I$, $|L| = p$. После, Конкурент открывает свои $r \geq 1$ предприятий, стремясь максимизировать свою долю рынка. Пусть множество $F \subseteq I$, $|F| = r$ обозначает выбор Конкурента. Клиенты выбирают из множества открытых фирмами предприятий одно, руководствуясь своими предпочтениями. Пусть d_{ij}, $i \in I, j \in J$ — матрица предпочтений клиентов, или матрица расстояний. В задаче об (r,p)-центроиде необходимо максимизировать долю рынка Лидера, принимая во внимания стратегию Конкурента и предпочтения клиентов.

Нетрудно заметить, что задача об (r,p)-центроиде обладает естественной двухуровневой структурой [1]. Пусть w_j, $j \in J$ – доход фирм от обслуживания j-го клиента. Тогда задача об (r,p)-центроиде может быть сформулирована в виде следующей комбинаторной двухуровневой задачи.

$$\max_L\{\sum_{j\in J:\min_{i\in L} d_{ij}\leq \min_{i\in F(L)} d_{ij}} w_j \ : \ L \subseteq I, |L| = p\}, \tag{1}$$

где $F(L)$ — оптимальное решение задачи Конкурента:

$$\max_F\{\sum_{j\in J:\min_{i\in F} d_{ij}\leq \min_{i\in L} d_{ij}} w_j \ : \ F \subseteq I \setminus L, |F| = r\}. \tag{2}$$

Предложена новая формулировка задачи в виде одноуровневой модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Проведено численное сравнение верхних оценок оптимального значения задачи, полученных при решении линейных релаксаций предложенной и известной из работы [2] формулировок.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00270-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Ю.А., Кононов А.В., Плясунов А.В. Конкурентные модели размещения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2009. – Т. 49, № 6. – С. 1-17.
2. Roboredo M. C., Pessoa A.A. A Branch-and-Cut Algorithm for the Discrete $(r|p)$-Centroid Problem // Preprint submitted to Europ. Journal of Operational Res. – 2011.

© Васильев Игорь Леонидович, Климентова Ксения Борисовна,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова, 134,
Иркутск, 644033, Россия, тел. (3952) 45-31-06, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: vil@icc.ru, Xenia.Klimentova@icc.ru

© Малева Тамара Владимировна,
Иркутский государственный университет,
ул. Карла Маркса, 20, Иркутск, 644003, Россия, тел. (3952) 52-12-98.

О ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ ЛОКАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Ю.Ю. Великанова

Рассматривается известная NP-трудная задача минимизации длины расписания на параллельных идентичных машинах. Для каждой работы задана длительность выполнения, прерывания работ не разрешены. Согласно принятой в [1] системе обозначений задач теории расписаний данная задача обозначается $P||C_{max}$.

В настоящее время для решения NP-трудных задач широко применяются методы локального поиска. Такие алгоритмы хорошо зарекомендовали себя на практике, но плохо изучены с теоретической точки зрения. В работе исследуется вопрос о сложности нахождения локального оптимума для задачи $P||C_{max}$. В [2,3] рассматривалась окрестность $Flip$ линейной мощности , в которой соседнее решение получается путем перемещения одной работы на другую машину. Известно, что для такой окрестности алгоритму локального спуска требуется $O(n^2)$ шагов, где n число работ. В данной работе рассматриваются окрестности квадратичной мощности $Swap$ и объединение двух окрестностей $Swap \bigcup Flip$. В окрестности $Swap$ соседние решения получаются перестановкой двух работ, выполняющихся на разных машинах. Доказано, что алгоритму локального спуска требуется $O(n^2)$ шагов в случае двух машин и $O(n^4m)$ шагов в общем случае, где m – число машин. Также показано, что в случае двух машин оценка точна.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-07-00474).

ЛИТЕРАТУРА

1. Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnoy Kan A.H.G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling // Annals of Discrete Mathematics 5. – 1979. – P. 286-326.
2. Bruker P., Hurink J., Werner F. Improving local search heuristics for some scheduling problems. I // Discrete Appl. Math. 1996. – V. 65, № 1-3. – P. 97-122.
3. Bruker P., Hurink J., Werner F. Improving local search heuristics for some scheduling problems. II // Discrete Appl. Math. 1997. – V. 72, № 1-2. – P. 47-69.

© Великанова Юлия Юрьевна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: julia.velikanova@gmail.com

РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ ПРИ НЕКООПЕРАТИВНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЙ

Д.А. Веснина

В работе рассматривается следующая задача размещения в игровой постановке. Известны два конечных множества: множество клиентов и множество предприятий. Заданы расстояния между каждым клиентом и каждым предприятием. Независимо друг от друга k игроков одновременно открывают по одному предприятию с целью максимизации собственного дохода. Допускается открытие одного предприятия несколькими игроками. Каждый клиент имеет определенный бюджет. Он тратит его целиком во всех открытых предприятиях обратно пропорционально расстоянию до каждого из предприятий. Решение игроков называют равновесием по Нэшу, если ни одному из игроков невыгодно менять свое предприятие при условии, что другие игроки не меняют свое решение.

Известно [1], что равновесия по Нэшу может не существовать, если каждый клиент тратит свой бюджет только в ближайшем из открытых предприятий. В этом случае задача распознавания: существует ли равновесие по Нэшу? – является NP-полной [1]. При фиксированном значении параметра k задача становится полиномиально разрешимой. В настоящей работе установлено, что эти свойства сохраняются и при новом правиле поведения клиентов, когда они тратят свой бюджет во всех открытых предприятиях (так называемое *the gravity rule*).

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00474.

ЛИТЕРАТУРА

1. Durr, C., Thang, N. K. Nash equilibria in Voronoi games on graphs // Proceedings of the 15th Annual European Conference on Algorithms, 2007. – P. 17-28.

© Веснина Дарья Андреевна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (+7)-923-243-92-76.
E-mail: vesnina.d.a@gmail.com

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ГЕНЕТИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

П.В. Галушин

Задачи оптимизации постоянно возникают в деятельности человека, например, при проектировании технических и социально-экономических систем параметры этой системы следует выбрать оптимальным с точки зрения цели функционирования системы образом. Сложные задачи оптимизации характеризуются такими свойствами как алгоритмическое задание целевой функции, наличие большого количества локальных экстремумов, большая размерность и различный характер параметров. Для решения таких задач часто используются эволюционные алгоритмы, например генетический алгоритм [1] и вероятностный генетический алгоритм [2].

В данной работе предлагается новый алгоритм дискретной оптимизации – асимптотический вероятностный генетический алгоритм (АВГА), основанный на идее замены традиционных генетических операторов операторами, действующими на распределение вероятностей значений компонент решений. Теоретическим основанием предложенного алгоритма является серия теорем, в которых доказывается, что предложенные операторы являются статистически эквивалентными операторам стандартного генетического алгоритма.

Предложенный алгоритм был исследован при решении тестовых задач оптимизации и реальных практических задач: задачи настройки параметров рыночного алгоритма динамического составления расписаний [3] и задаче формирования оптимального кредитного портфеля банка [4].

Результаты численных экспериментов показывают, что предложенный алгоритм превосходит существующие аналоги по быстродействию и эффективности решения задач оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldberg D.E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. – Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
2. Семенкин Е.С., Сопов Е.А. Вероятностные эволюционные алгоритмы оптимизации сложных систем // Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS'05) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2005): в 3 т. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Т. 1.
3. Morley R. Painting trucks at General Motors: the effectiveness of a complexity-based approach // Embracing Complexity: exploring and application of complex adaptive systems to business, 1996. – P. 53-58.
4. Пуртиков В.А. Оптимизация управления формированием кредитного портфеля банка. – Дисс. канд. техн. наук. – Красноярск: САА, 2001.

© Галушин Павел Викторович,
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решётнева,
пр-т им. газ. "Красноярский рабочий", 31, Красноярск, 660014, Россия,
тел. (391) 291-91-10, факс (391) 264-47-09.
E-mail: galushin@gmail.com

О ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ РЁБЕР ГРАФА

Э.Х. Гимади, А.М. Истомин, И.А. Рыков

Рассматривается задача m коммивояжёров с ограничениями пропускной способности рёбер (m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem, m-CPSP) [3]. В полном неориентированном взвешанном графе G, каждое ребро e которого имеет заданную пропускную способность $C_e \in \{1, 2, \ldots, m\}$, требуется найти m гамильтоновых циклов экстремального суммарного веса с использоваием каждого ребра e не более C_e раз.

Задача m-CPSP NP-трудна, поскольку в частном случае единичных пропускных способностей каждого ребра имеем задачу m-PSP, которая NP-трудна при $m \geq 2$ даже на графе с весами рёбер, принимающими значения из множества $\{1, 2\}$ [2].

В данной работе рассмотрена задача 2-CPSP на минимум с весами рёбер 1 или 2 в случае, когда каждое ребро e графа имеет пропускную способность $C_e = 2$ с вероятностью p и $C_e = 1$ с вероятностью $1 - p$. Представлен полиномиальный алгоритм решения этой задачи с оценкой точности $\frac{19-5p}{12}$. Алгоритм основан на идеях из [1] и использует алгоритм решения задачи TSP$\{1, 2\}$ с оценкой точности 7/6 из [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00093 и № 10-07-00032) и Интеграционного проекта 2012-2014 ИМ СОРАН, ИММ УрО РАН, ИСЭМ СОРАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Коркишко Н.М. Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2, 2004. – Т. 11, № 1. – С. 11-25.

2. De Kort J.B.J.M. Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. – 1991. – Vol. 22, № 1. – P. 113-122.

3. Duchenne É., Laporte G., Semet F. The m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem // Graph and Optimization Meeting 2008 (GOM 2008), Saint-Maximim La Sainte Baume, France, *août*.

4. Papadimitriu C.H., Yannakakis M. The travelling salesman problem with distance One and Two // Math. Oper. Res. – 1993. – Vol. 18, № 1. – P. 1-11.

© Гимади Эдуард Хайрутдинович, Истомин Алексей Михайлович,
Рыков Иван Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. 8913-948-3806, факс (383) 333-25-98.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru, alexeyistomin@gmail.com, irykov@academ.org

ПУТЕВЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМ ОБХВАТОМ

А.Н. Глебов, Д.Ж. Замбалаева

Пусть $a \geq 1$, $b \geq 1$ — целые числа. Граф G называется (a,b)-*разбиваемым*, если существует такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$, что в подграфе $G_1 = G[V_1]$, порожденном подмножеством V_1, число вершин любой простой цепи не превосходит a, а в подграфе $G_2 = G[V_2]$ — не превосходит b. Заметим, что $(1,1)$-разбиваемость графа равносильна его двудольности, $(2,2)$-разбиваемость — возможности разбиения на два подграфа с максимальной степенью 1. Бородиным и Ивановой [1,2] было доказано, что планарные графы с обхватом не менее 14 являются $(1,2)$-разбиваемыми, а с обхватом не менее 8 — $(2,2)$-разбиваемыми.

Михоком [4] было показано, что для любых фиксированных значений параметров a, b существуют плоские графы, не являющиеся (a,b)-разбиваемыми. При этом во всех примерах графов, приводимых в [4], содержится большое число циклов длины 3. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для какого наименьшего значения $g \geq 4$ существуют такие константы a, b, что любой плоский граф с обхватом не менее g является (a,b)-разбиваемым. В работе [3] нами была доказана $(3,3)$-разбиваемость плоских графов с обхватом 7, что эквивалентно возможности разбиения множества вершин такого графа на два подмножества, каждое из которых порождает звездный лес. Целью настоящего доклада является результат о том, что любой плоский граф с обхватом 6 является $(5,5)$-разбиваемым.

При доказательстве используется техника сводимых конфигураций и метод перераспределения зарядов, основанный на формуле Эйлера.

Работа поддержана грантом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"(гос. контракты № 02.740.11.0429 и 14.740.11.0868).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин О. В., Иванова А. О. Почти правильные 2-раскраски вершин разреженных графов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – Т. 16, № 2. – С. 16-20.
2. Бородин О. В., Иванова А. О. Разбиение разреженных плоских графов на два подграфа малой степени // Сибирские электронные математические известия. (http://semr.math.nsc.ru). – 2009. – Т. 6. – С. 13-16.
3. Замбалаева Д.Ж. Разбиение плоского графа с обхватом 7 на два звездных леса // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 20-46.
4. Mihok J. Graphs, hypergraphs and matroids. Zielon Gora: Higher College Engrg., 1985.

© Глебов Алексей Николаевич, Замбалаева Долгор Жамьяновна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-28-92, факс (383) 333-25-98.
E-mail: angle@math.nsc.ru, dolgorzam@gmail.com

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ НЕСКЛАДИРУЕМЫМИ РЕСУРСАМИ

Е.Н. Гончаров

Рассматривается многономенклатурная одномодальная задача календарного сетевого планирования в условиях ограниченных ресурсов по критерию минимизации срока выполнения проекта. Ресурсы предполагаются нескладируемыми, они являются неотрицательными вещественными числами, имеющими произвольную динамику их выделения [1].

Совокупность работ представлена в виде ориентированного графа, в котором дуги являются работами, а вершины – событиями. Каждая фактическая работа может потреблять произвольное число ресурсов, причем ресурсы потребляются с произвольной динамикой потребления. Длительности работ – произвольные вещественные неотрицательные числа.

В [2] был предложен малотрудоемкий детерминированный жадный алгоритм решения задачи с временной сложностью, зависящей от количества работ как $n \log n$. Идея алгоритма состоит в использовании решения ослабленной задачи, в которой ограниченные ресурсы являются складируемыми. Это решение использовалось как оценочное, на его основе строится решение исходной задачи.

Качество алгоритма исследовано в серии вычислительных экспериментов, тестовые примеры для которых были взяты из библиотеки тестовых задач PSPLIB [3]. Апробация и тестирование алгоритма проводились также по реальной информации, представленной ИЭиОПП СО РАН.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00093, 10-01-00195), целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б), а также грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации: Тр./ АН СССР Сиб. Отд-ние. Институт математики. – Новосибирск: Наука, 1988. – Т. 10. – С. 89-115.
2. Goncharov E.N. A greedy heuristic approach for the resource-constrained project scheduling problem // Studia Informatica Univeralis. – 2011. – Vol. 9, № 3. – P. 79-90.
3. Kolisch R., Sprecher A. PSPLIB – A project scheduling problem library // Eur. J. Oper. Res. – 1996. – Vol. 96, № 1. – P. 205-216.

© Гончаров Евгений Николаевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-22.
E-mail: gon@math.nsc.ru

ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК ДЛЯ ЗАДАЧИ О (r, p)-ЦЕНТРОИДЕ НА ПЛОСКОСТИ

И.А. Давыдов

Рассматривается конкурентная задача размещения предприятий. На евклидовой плоскости задано множество клиентов. Две фирмы, Лидер и Конкурент, последовательно размещают на плоскости p и r предприятий соответственно. Открывать предприятия разрешается в любой точке плоскости. Каждый клиент выбирает ближайшее из открытых предприятий для обслуживания. Обслуживание клиента приносит доход владельцу предприятия. Каждая фирма стремится максимизировать свой доход. Необходимо найти размещение предприятий Лидера, максимизирующее его доход [1].

Для вычисления целевой функции на заданном допустимом решении Лидера необходимо найти оптимальное размещение предприятий Конкурента, максимизирующего его доход. Эта задача NP-трудна. Для задачи Конкурента известна процедура дискретизации [2], позволяющая выделить на плоскости конечное множество точек, содержащих оптимальное размещение. Размер этого множества полиномиально зависит от входных данных задачи. Таким образом, задача Конкурента сводится к NP-трудной задаче о максимальном покрытии. Приближенные решения хорошего качества для последней задачи вычисляются с применением метаэвристик. Точное же решение может быть получено с применением метода ветвей и границ. Что касается исходной задачи, то для нее дискретизация неизвестна, что затрудняет применение численных методов.

Предлагается процедура дискретизации для вспомогательной задачи о $(r|X_{p-1} + 1)$ - центроиде. Эта задача заключается в отыскании оптимального размещения одного предприятия лидера при условии, что остальные $p - 1$ предприятия уже зафиксированы. Для такой задачи возможно выделить полиномиально зависящее от входных данных число точек, содержащих оптимальное размещение предприятия Лидера. Это позволяет найти точное решение вспомогательной задачи за полиномиальное число обращений к алгоритму решения задачи Конкурента. Этот факт позволяет использовать для исходной задачи алгоритмы локального поиска, поочередно переставляя одно из предприятий Лидера в наиболее выгодную для него позицию. Обсуждаются результаты численных экспериментов на примерах с числом клиентов до 100.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-07-00474).

ЛИТЕРАТУРА

1. Carrizosa E., Davydov I., Kochetov Yu. New alternating heuristic for the $(r|p)$-centroid problem on the plane // Operations Research Proceedings. – 2012. – Springer (in press).
2. Bhadury J., Eiselt H.A., Jaramillo J.H. An alternating heuristic for medianoid and centroid problems in the plane // Computers & Oper. Res. – 2003. – Vol. 30. – P. 553-565.

© Давыдов Иван Александрович,
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: vann.davydov@gmail.com

АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

А.В. Долгушев, А.В. Кельманов, В.В. Шенмайер

Рассматривается следующая NP-трудная [1] в сильном смысле

Задача 1-MSSC-F. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число M. *Найти*: подмножество (кластер) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ мощности M такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{y \in \mathcal{C}} y$ — центр кластера.

К этой задаче сводится [1] одна из актуальных проблем анализа данных и распознавания образов. В работе [2] для задачи 1-MSSC-F предложен 2-приближенный полиномиальный алгоритм, временная сложность которого есть величина $\mathcal{O}(qN^2)$.

В настоящей работе обоснована приближенная полиномиальная схема (PTAS), позволяющая решать задачу с произвольной относительной погрешностью ε за время $\mathcal{O}(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$. Подход к построению схемы аналогичен подходу, предложенному в [3], для решения близкой в постановочном плане задачи. Суть подхода состоит в поиске центра искомого кластера среди точек линейных оболочек всех подмножеств множества $\mathcal{Y}$ некоторой фиксированной мощности t. Для эффективного поиска каждая из таких линейных оболочек аппроксимируется дискретным множеством точек. Погрешность алгоритма определяется параметром t и частотой дискретизации линейных оболочек.

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00090, № 12-01-00125, № 10-07-00195, № 11-07-12083-офи-м, грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты № 7Б и № 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, № 11. – С. 2059-2067.
2. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближенный алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 2. – С. 29-40.
3. Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 92-100.

© Долгушев Алексей Владимирович, Кельманов Александр Васильевич, Шенмайер Владимир Владимирович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-79, (383) 363-46-15, факс (383) 332-25-98.
E-mail: dolgushev@math.nsc.ru, kelm@math.nsc.ru, shenmaier@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ ВАЛЬДА

В.А. Емеличев, В.В. Коротков

Рассматривается векторный (s-критериальный) дискретный вариант управления инвестициями, основанный на портфельной теории Марковица [1], с упорядоченными критериями эффективности Вальда [2]:

$$\max_{x\in X}\min_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n} e_{ijk}x_j, \qquad k\in N_s=\{1,2,\dots,s\}. \tag{1}$$

Здесь N_n – инвестиционные проекты; N_m – рыночные ситуации; N_s – виды (показатели) эффективности (доходности) инвестиционного проекта; $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in X\subseteq\mathbb{E}^n$ – инвестиционный портфель, где $x_j=1$, если инвестиционный проект $j\in N_n$ реализуется, и $x_j=0$ в противном случае; e_{ijk} – оценки эффективности вида $k\in N_s$ инвестиционного проекта $j\in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i\in N_m$. Множество всех лексикографически оптимальных портфелей (ЛОП) задачи последовательной максимизации (1) обозначим через $L^s(E)$, где $E=[e_{ijk}]\in\mathbb{R}^{m\times n\times s}$. Радиусом устойчивости ЛОП $x^0\in L^s(E)$, как обычно [3], называем число $\rho^s(x^0,E)=\sup\ \Xi$, если $\Xi\neq\emptyset$, и $\rho^s(x^0,E)=0$, если $\Xi=\emptyset$, где $\Xi=\{\varepsilon>0:\ \forall E'\in\Omega(\varepsilon)\ \ x^0\in L^s(E+E')\}$, $\Omega(\varepsilon)=\{E'\in\mathbb{R}^{m\times n\times s}:\ \|E'\|<\varepsilon\}$.

Теорема. *Для радиуса устойчивости ЛОП x^0 справедливы следующие достижимые оценки:*

1) $\varphi\le\rho^s(x^0,E)\le 2\varphi$, *если* $\|E'\|=\sum\limits_{(i,j,k)\in N_m\times N_n\times N_s}|e'_{ijk}|$,

2) $\varphi/2\le\rho^s(x^0,E)\le\varphi$, *если* $\|E'\|=\max\limits_{i\in N_m}\max\limits_{k\in N_s}\sum\limits_{j\in N_n}|e'_{ijk}|$,

где $E'=[e'_{ijk}]\in\mathbb{R}^{m\times n\times s}$, $\varphi=\min\limits_{x\in X\setminus\{x^0\}}\max\limits_{i\in N_m}\min\limits_{i'\in N_m}\Big(\sum\limits_{j\in N_n}e_{i'j1}x^0_j-\sum\limits_{j\in N_n}e_{ij1}x_j\Big)$.

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского ФФИ Ф11К-095.

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz H.M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. – Oxford: Blackwell Publ., 1991.
2. Wald A. Statistical decision functions. – New York: John Wiley, 1950.
3. Емеличев В.А., Коротков В.В. Оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа // Дискретный анализ и исследования операций. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 41-50.

© Емеличев Владимир Алексеевич, Коротков Владимир Владимирович,
Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, тел. (+375 17) 209 50 47.
E-mail: emelichev@tut.by, wladko@tut.by

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ КОММУНИКАЦИОННОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

А.И. Ерзин, Р.В. Плотников, Ю.В. Шамардин

В данной работе рассматривается следующая задача минимизации суммарных энергозатрат на связь элементов беспроводной сети, которая возникает в различных приложениях [1,2]. Задан простой неориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V, $|V| = n$, и множеством ребер E. Пусть $c_{ij} \geq 0$ — *вес* ребра $(i, j) \in E$. Требуется найти остовное дерево T^* графа G, являющееся решением задачи:

$$W(T) = \sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} c_{ij} \to \min_T,$$

где $N_i(T)$ – множество вершин, смежных с вершиной i в дереве T.

Авторами работы найдены частные случаи полиномиальной разрешимости; показано, что минимальный остов, веса рёбер которого принадлежат отрезку $[a, b]$, является $\left(2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)}\right)$-приближенным решением и, что задача построения 1,00048-приближенного решения NP-трудна; предложен эвристический полиномиальный алгоритм и осуществлён его апостериорный анализ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00149-а и 12-07-92690-ИНД_а), а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0362)

ЛИТЕРАТУРА

1. Althaus E. et al. Power Efficient Range Assignment for Symmetric Connectivity in Static Ad Hoc Wireless Networks // Wireless Networks. – 2006. – Vol. 12, № 3. – P. 287-299.
2. Kirousis L.M., Kranakis E., Krizanc D., Pelc A. Power consumption in packet radio networks // Theoretical Computer Science. – 2000. – № 243. – P. 289-305.

© Ерзин Адиль Ильясович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-82.
E-mail: adilerzin@math.nsc.ru

© Плотников Роман Викторович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: nomad87@ngs.ru

© Шамардин Юрий Владиславович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-75.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

Г.Г. Забудский, И.В. Амзин

В работе рассматривается задача оптимального размещения n прямоугольников вдоль m параллельных линий, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множества соответствующих номеров. Для прямоугольника j известны длина l_j и ширина h_j, $j \in J$. Необходимо разместить прямоугольники на линиях таким образом, чтобы длина и ширина прямоугольной оболочки были минимальными. Двухкритериальная модель сформулированной задачи имеет следующий вид [1]:

$$Q_1(z) = \max_{k \in M} \left\{ \sum_{j \in J} l_j z_{jk} \right\} \to \min,$$

$$Q_2(z) = \sum_{k \in M} \max_{j \in J} \{h_j z_{jk}\} \to \min,$$

$$\sum_{k \in M} z_{jk} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} z_{jk} \geq 1, \quad k \in M,$$

$$z_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in J, k \in M,$$

где булева переменная $z_{jk} = 1$, если объект с номером j расположен на линии с номером k, иначе $z_{jk} = 0$ и $z = (z_{jk})$, $j \in J$, $k \in M$.

При произвольном m для построения множества Парето-оптимальных решений используется метод уступок, в котором решается серия задач целочисленного линейного программирования. Поиск решения, приближенного к Парето-оптимальному с минимальной длиной, основан на динамическом программировании (ДП). Точные решения в случае $m = 2$ также находятся с помощью ДП. Проведен вычислительный эксперимент с применением указанных алгоритмов и пакета IBM ILOG CPLEX.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г.Г., Амзин И.В. Компактное размещение прямоугольных объектов на параллельных линиях // Материалы Российской конференции “Дискретная оптимизация и исследование операций”. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010. – С. 114.

© Забудский Геннадий Григорьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru

© Амзин Игорь Викторович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 26-97-73.
E-mail: igor.amzin@mail.ru.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ С ЗОНАМИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ВЛИЯНИЯ

Г.Г. Забудский, Т.И. Кейнер

Задачи оптимального размещения связаны с поиском наилучшего расположения объектов, которыми могут быть пункты обслуживания, единицы технологического оборудования, предприятия и т.д. Значительное число публикаций посвящено размещению опасных объектов, у которых имеются зоны отрицательного влияния, и нахождение в них населенных пунктов нежелательно [1,2].

В докладе рассматривается минимаксная задача оптимального размещения опасных объектов в прямоугольной области с прямоугольными зонами влияния [1].

$$\max_{j\in J}\{\sum_{i\in I(Q_j(x_j,y_j))} w_i\} \to min,$$

$$Int(Q_j(x_j,y_j))\bigcap Int(Q_k(x_k,y_k)) = \emptyset, j \neq k, j,k \in J,$$

$$Q_j(x_j,y_j) \in S, j \in J,$$

где I, J – множество номеров фиксированных и размещаемых объектов соответственно, $w_i > 0$ – вес объекта $i, i \in I$, $I(Q_j(x_j,y_j))$ – множество номеров фиксированных объектов в зоне Q_j, когда ее левый нижний угол находится в точке $(x_j,y_j), j \in J$. Задача для произвольного числа опасных объектов является NP-трудной.

В работе описана процедура сведения исходной непрерывной задачи к дискретной с помощью разбиения допустимой области на конечное число классов. Найдены некоторые свойства задачи и предложены алгоритмы ее решения для двух опасных объектов. Проведен вычислительный эксперимент с использованием разработанных алгоритмов и пакета IBM ILOG CPLEX.

Работа поддержана интеграционным проектом СО РАН № 7Б; проектом Президиума РАН №15.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г.Г., Крюкова Т.И. Решение минимаксной задачи размещения опасных объектов на плоскости //Труды XV Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск: ИДСТУ СОРАН, 2011. – Т. 4. – С. 105-110.

2. Drezner Z., Wesolowsky G.O. Finding the circle or rectangle containing the minimum weight of points // Location Science. – 1994. – Vol. 2, № 2. – P. 83-90.

© Забудский Геннадий Григорьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru

© Кейнер Татьяна Игоревна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 26-97-73.
E-mail: volka89@yandex.ru

РЕШЕНИЕ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ С МИНИМАЛЬНО ДОПУСТИМЫМИ РАССТОЯНИЯМИ

Г.Г. Забудский, А.А. Коваль

Необходимость решения максиминных задач размещения возникает при поиске мест расположения опасных объектов. Они должны находиться "как можно дальше" от населенных пунктов, так как оказывают вредное воздействие на здоровье жителей. Одной из таких задач посвящена данная работа.

Для записи модели введем обозначения: $V = \{v_i | i \in N\}$ – множество фиксированных объектов (населенных пунктов); S – прямоугольная область, содержащая множество V; $O = \{o_j | j \in P\}$ – множество опасных объектов; R_{ij} и M – минимально допустимые расстояния между v_i и o_j, $i \in N, j \in P$ и между парами размещаемых объектов соответственно; $w_i > 0$ – вес объекта (величина, обратная количеству населения) i, $i \in N$; ρ – чебышевская метрика. Необходимо разместить множество O в S таким образом, чтобы не нарушались ограничения, и взвешенное минимальное расстояние от размещаемых объектов до фиксированных было максимальным.

С помощью переменной L модель записывается следующим образом [1, 2]:

$$\begin{aligned} L &\to max, \\ \rho(o_j, v_i) &\geq max(R_{ij}, \frac{L}{w_i}), i \in N, j \in P, \\ \rho(o_i, o_j) &\geq M, i, j \in P, \\ o_j &\in S, j \in P. \end{aligned}$$

Найдены свойства задачи когда $w_i = 1$ и $R_{ij} = 0$, $i \in N, j \in P$, позволяющие для ее решения просматривать конечное множество значений параметра L. Для общего случая предложен алгоритм поиска приближенного решения с заданной точностью. Проведен вычислительный эксперимент по размещению двух объектов с помощью разработанного алгоритма и программного продукта IBM ILOG CPLEX с применением модели целочисленного линейного программирования.

Работа поддержана проектами РФФИ №10-01-00598 и Президиума РАН №15.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г.Г., Коваль А.А. О решении одной максиминной задачи размещения объектов на плоскости// Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, 2011. – Т. 4. – С. 100-104.
2. Katz M.J., Kedem K., Segal M. Improved algorithms for placing undesirable facilities// Computer & Operations Research. – 2002. – Vol. 29. – P. 1859-1872.

© Забудский Геннадий Григорьевич, Коваль Антон Андреевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru, akoval@thumbtack.net

О ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С БЛОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ ДОХОДОВ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

Р.Т. Зайнутдинов, Ю.В. Шамардин

Рассматривается частный случай децентрализованной транспортной задачи [1]. Матрица доходов (c_{ij}) имеет n строк и kn столбцов, где, $n \geq 3$, $k \geq 2$. Каждая строка $i = 1, \ldots, n$ матрицы доходов (c_{ij}) содержит $2k$ различных числа, которые обозначим через $a_{i1}, \ldots, a_{ik}, b_{i1}, \ldots, b_{ik}$. Остальные элементы строки равны достаточно большому по модулю отрицательному числу или формально $c_{ij} = -\infty$. Конечные элементы матрицы (c_{ij}) составляют подматрицы размера $2 \times k$, называемые блоками. Блок, расположенный в строках $i, i{+}1$, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,k-1} & a_{i,k} \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & \ldots & b_{i+1,k-1} & b_{i+1,k} \end{pmatrix}.$$

Обозначим первую строку данного блока через A_i, а вторую через B_{i+1}. Тогда матрица (c_{ij}) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -\infty & \cdots & \cdots & -\infty & B_1 \\ B_2 & A_2 & -\infty & \cdots & \cdots & -\infty \\ -\infty & B_3 & A_3 & -\infty & \cdots & -\infty \\ & & \ddots & \ddots & & \\ -\infty & \cdots & -\infty & B_{n-1} & A_{n-1} & -\infty \\ -\infty & \cdots & \cdots & -\infty & B_n & A_n \end{pmatrix}.$$

Предлагается алгоритм решения задачи на основе метода динамического программирования с временной сложностью $O(k^2n + kn^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьев В.Т., Пяткин А.В. О децентрализованной транспортной задаче // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, № 3. – С. 22-30.
2. Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Об одном полиномиально разрешимом случае децентрализованной транспортной задачи // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 1. – С. 20-26.

© Зайнутдинов Руслан Тахирович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: zaynutdinov.ruslan@gmail.com

© Шамардин Юрий Владиславович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-75.

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л.А. Заозерская

Для анализа трудоемкости ряда алгоритмов булева программирования важным является определение мощности множества допустимых решений задач. В [1] предложен подход к построению верхних оценок среднего числа итераций алгоритмов, основанных на аппарате непрерывной оптимизации. Он базируется на методе регулярных разбиений и верхних оценках среднего числа допустимых решений задач. На основе этого подхода получены верхние оценки среднего числа итераций некоторых алгоритмов указанного типа для известных подклассов задач об упаковке множества и о многомерном рюкзаке с булевыми переменными, а также и их расширений [2].

Рассмотрим задачу об упаковке множества:

$$\max\{cx \mid Ax \leq \mathbf{1},\ x \in \{0,\ 1\}^n\}, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – булева матрица, $c_j > 0$ – целые, $j = 1, ..., n$. Нами исследовался класс $\mathcal{P}_{n,p}$ задач данного вида, в котором a_{ij} – независимые случайные величины, причем $\mathbf{P}\{a_{ij} = 1\} = p$, где $p \in (0,\ 1)$. Через X_k обозначим множество допустимых решений задачи (1), имеющих ровно k единиц, $k = 0, 1, ..., n$. Для класса $\mathcal{P}_{n,p}$ определим функцию $g(k) = \mathbf{E}|X_{k+1}|/\mathbf{E}|X_k|$, где $k = 0, 1, ..., n-1$. Здесь $\mathbf{E}\xi$ – математическое ожидание случайной величины ξ. Ранее нами установлено, что функция $g(k)$ является убывающей. Это позволило получить полиномиальные верхних оценки среднего числа допустимых решений задач из $\mathcal{P}_{n,p}$ в зависимости от соотношений на их параметры. Аналогичные результаты получены для задачи о покрытии множества [3].

В данной работе монотонность функции $g(k)$ доказана для некоторых обобщений задач об упаковке и покрытии множества. Экспериментально показано, что это свойство имеет место и для многомерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 10-01-00598, Интеграционного проекта СО РАН № 7Б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заозерская Л.А., Колоколов А.А. О среднем числе итераций некоторых алгоритмов для решения задачи об упаковке множества // Труды XIV Байкальской международн. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 388-395.
2. Заозерская Л.А., Колоколов А.А., Гофман Н.Г. Оценки среднего числа итераций для алгоритмов решения некоторых задач булева программирования// Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 3. – С. 49-64.
3. Kolokolov A.A., Zaozerskaya L.A. On the Approach of Obtaining the Upper Bounds on the Average Number of Iterations of Some Integer Programming Algorithms // Proc. of II International Conference «Optimization and applications». – Petrovac, Montenegro, September 25 - October 2, 2011. – M.: ВЦ РАН, 2011. – P. 137-140.

© Заозерская Лидия Анатольевна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru

ОРАКУЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ КЛАССА АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

Н.Ю. Золотых

Рассмотрим задачу о рюкзаке с двусторонними ограничениями: найти $\max cx$, где

$$M = \{x \in E_k^n : \ ax \le a_0\}, \tag{1}$$

$E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $c \in \mathbf{Z}^n$, $a \in \mathbf{Z}^n$, $a_0 \in \mathbf{Z}$, $k \ge 2$, $cx = \sum_{j=1}^n c_j x_j$. Будем предполагать, что M задано с помощью оракула, отвечающего на вопрос, выполнено или нет неравенство $ax \le a_0$, где x – точка, выбираемая из $\mathbf{Q}^n$.

Обозначим $\mathcal{M}(n,k)$ множество всех M, удовлетворяющих (1), и рассмотрим задачу $\mathcal{P}$: "Для заданных целых $n \ge 2$, $k \ge 2$ и $c_1, \ldots, c_n$ с помощью обращений к оракулу определить, является ли пустым множество M, и если нет, найти $\max cx$". Пусть $\mathcal{A}$ – некоторый алгоритм, решающий задачу $\mathcal{P}$. Обозначим $\tau(\mathcal{A}, n, k)$ и $\rho(\mathcal{A}, n, k)$ соответственно максимальное число обращений к оракулу и максимальное число операций, совершаемых алгоритмом $\mathcal{A}$, если максимум берется по всем возможным $c \in \mathbf{Z}^n$ и $M \in \mathcal{M}(n,k)$.

Используя мощностные соображения, можно доказать, что для любого алгоритма $\mathcal{A}$, решающего задачу $\mathcal{P}$,

$$\tau(\mathcal{A}, n, k) \ge \log_2 |E_k^n| = n \log_2 k.$$

Мы предлагаем алгоритм $\mathcal{A}'$, решающий задачу $\mathcal{P}$, для которого $\rho(\mathcal{A}, n, k)$ при фиксированном n ограничено некоторым полиномом от $\log_2 \max\{k, c_1, \ldots, c_n\}$ и

$$\tau(\mathcal{A}, n, k) \le \frac{n^4}{2} \log_2(n+1) + 2n^3 \log_2 k.$$

Заметим, что в [1] рассмотрена задача о рюкзаке, в которой M задано (более слабым) оракулом, отвечающим на вопрос "$x \in M$?", где x – точка, выбираемая из E_k^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотых Н.Ю. О сложности решения одного класса задач целочисленного линейного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2, 2003. – Т. 10, № 1. – С. 3-10.

© Золотых Николай Юрьевич,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр-т Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (831) 462-33-60.
E-mail: zolotykh@vmk.unn.ru

ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ НАСЛЕДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

В.П. Ильев, А.А. Навроцкая

Пусть U – непустое конечное множество. Определим *наследственную систему* на множестве U как пару $S = (U, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ – непустое семейство подмножеств множества U, удовлетворяющее следующей *аксиоме наследственности «вверх»*:

$$D_1 \in \mathcal{D},\ D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow D_2 \in \mathcal{D}.$$

Множества семейства $\mathcal{D}$ назовем *зависимыми множествами* наследственной системы S, все остальные подмножества U – *независимыми*. *Циклами* наследственной системы называются ее минимальные по включению зависимые множества. Система S называется *коматроидом*, если семейство $\mathcal{C}$ ее циклов удовлетворяет аксиоме:

$$C_1, C_2 \in \mathcal{C}, c_1 \in C_1 \setminus C_2 \Rightarrow \exists c_2 \in C_2 \setminus C_1 : (C_1 \setminus \{c_1\}) \cup \{c_2\} \in \mathcal{C}.$$

Наследственная система, в которой подобным свойством обладает семейство баз (т. е. максимальных по включению независимых множеств), называется *матроидом*.

Рассмотрим следующую задачу комбинаторной оптимизации:

$$\min\{f(X) : X \in \mathcal{D}\}, \tag{1}$$

где $f : 2^U \to R_+$ – неотрицательная аддитивная функция, $\mathcal{D}$ – семейство зависимых множеств некоторой наследственной системы $S = (U, \mathcal{D})$.

Задача (1) в общем случае *NP*-трудна, но в случае, когда S – коматроид, она быстро разрешима обратным жадным алгоритмом [1]. В связи с этим представляет интерес следующий вопрос: как сильно данная наследственная система отличается от коматроида? Так мы приходим к *задаче аппроксимации наследственной системы*, в которой требуется найти ближайший к данной наследственной системе $S = (U, \mathcal{D})$ коматроид $S^* = (U, \mathcal{D}^*)$ на том же множестве U. Имея в виду задачу (1), определим меру близости $\rho(S, S^*)$ наследственной системы S и коматроида S^* как $\rho(S, S^*) = |f(OptS) - f(OptS^*)|$, где $OptS$ и $OptS^*$ – оптимальные решения задачи (1) и аналогичной задачи на коматроиде S^* с той же целевой функцией.

Доказано, что для всякой наследственной системы $S = (U, \mathcal{D})$

$$\rho(S, S^*) \le \max\{|f(u) - f(v)| : u, v \in U\}.$$

Аналогичный результат получен для задачи аппроксимации наследственной системы матроидами, связанной с задачей максимизации неотрицательной аддитивной функции на семействе независимых множеств наследственной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Il'ev V. Hereditary systems and greedy-type algorithms // Discrete Appl. Math. – 2003. – Vol. 132. – P. 137-148.

© Ильев Виктор Петрович, Навроцкая Анна Александровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. 22-56-96.
E-mail: iljev@mail.ru, nawrocki@yandex.ru

О ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СВЕРХУ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ

С.Д. Ильева, В.П. Ильев

Задача аппроксимации графа является теоретико-графовой моделью задачи классификации системы взаимосвязанных объектов, в наибольшей степени учитывающей существующую структуру связей между объектами системы.

Будем рассматривать только *обыкновенные* графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ – графы на одном и том же множестве вершин V, то *расстояние* $\rho(G_1, G_2)$ между ними определим как $|E_1 \triangle E_2| = |(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)|$, т. е. $\rho(G_1, G_2)$ – число несовпадающих ребер в графах G_1, G_2.

Обыкновенный граф будем называть *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом. Обозначим через $\mathcal{M}_{1\ldots k}(V)$ класс всех M-графов на множестве вершин V, имеющих не более k компонент связности, $2 \le k \le |V|$.

Рассмотрим следующий вариант задачи аппроксимации графа.

Дан граф $G = (V, E)$ и целое положительное число k, $2 \le k \le |V|$. Требуется найти такой граф $M_O \in \mathcal{M}_{1\ldots k}(V)$, что $\rho(G, M_O) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}_{1\ldots k}(V)} \rho(G, M)$.

Известно [1], что эта задача NP-трудна для любого фиксированного $k \ge 2$. В статье [2] для ее приближенного решения предложен алгоритм с гарантированной оценкой точности $(3 - \frac{6}{n})^{k-1}$. Тем самым показано, что для любого фиксированного $k \ge 2$ указанная задача принадлежит классу APX. Таким образом, у нас имеется 3-приближенный алгоритм при $k = 2$ и 9-приближенный алгоритм при $k = 3$.

В данной работе для случая $k = 3$ предложен 6-приближенный алгоритм. Более точно, доказано, что для любого n-вершинного графа $G = (V, E)$ алгоритм находит такой M-граф $M \in \mathcal{M}_{1\ldots 3}(V)$, что расстояние от графа G до графа M превосходит расстояние от графа G до оптимально аппроксимирующего M-графа $M_O \in \mathcal{M}_{1\ldots 3}(V)$ не более, чем в $6 - \frac{6}{n}$ раз.

Предложенный алгоритм может быть естественным образом модифицирован для произвольного $k \ge 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.А., Ильев В.П., Кононов А.В., Талевнин А.С. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 1. – 2006. – Т. 13, № 1. – С. 3-15.

2. Ильев В.П., Ильева С.Д., Навроцкая А.А. Приближенные алгоритмы для задач аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2011. – Т. 18, № 1. – С. 41-60.

© Ильева Светлана Диадоровна, Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. 22-56-96.
E-mail: iljeva@mail.ru, iljev@mail.ru

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ УПАКОВКИ

В.М. Картак, М.А. Мухачева

Рассматривается классическая задача N-мерной ортогональной упаковки в замкнутую область, которая состоит в следующем. Даны m параллелепипедов $\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_j\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, заданных своими размерами $\mathbf{W}_j = (w_1^j, \ldots, w_N^j) \in \in R_+^N$, и область $S = (S_1, S_2, \ldots, S_N) \in R_+^N$, являющаяся также N-мерным ортогональным параллелепипедом. Требуется выяснить, можно ли все предметы из $\mathbf{W}$ упаковать в $\widetilde{S}$ без перекрытия. Поворот предметов запрещен. Эта задача NP трудная и является ключевой для многих проблем дискретной оптимизации (транспортной задачи, задачи логистики, задачи составления расписания и т.д.) [1].

В последнее время активно развиваются методы, основанные на использовании растровых множеств R_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$, где

$$R_i = \left\{ \sum_{j \in J} w_i^j a_j \ : \ \sum_{j \in J} w_i^j a_j \leq S_i, a_j \ \in \{0, 1\} \right\}.$$

Здесь проблема упаковки представляется как задача линейного целочисленного программирования с числом переменных, зависящим от $|R_i|$, и решается с использованием известных пакетов [2].

В докладе вводится понятие эквивалентности двух задач многомерной ортогональной упаковки в замкнутую область. Доказаны необходимые и достаточные условия эквивалентности двух произвольных задач. Для любой заданной задачи предложен метод построения полного множества эквивалентных ей задач. Тем самым для известных оптимизационных алгоритмов появилась возможность выбора наиболее удачной постановки задачи среди класса задач ей эквивалентных. Выработаны критерии, которые позволяют построить эквивалентную задачу с меньшим числом растровых точек. Приведены результаты численного эксперимента.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухачева Э.А., Картак В.М., Мухачева А.С., Валеева А.Ф. Модели и методы решения задач ортогонального раскроя и упаковки: аналитический обзор и новая технология блочных структур // Информационные технологии. – 2004. – № 5. – С. 2-17.

2. Clautiaux F., Jouglet A., Carlier J., Moukrim A. A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem // Computers and Operations Research. – 2008. – Vol. 34, № 8. – P. 2223-2250.

© Картак Вадим Михайлович, Мухачева Марина Андреевна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 273-79-67.
E-mail: kvmail@mail.ru, mukhacheva.marina@gmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ СЕРИЙНУЮ СТРУКТУРУ

А.В. Кельманов, Л.В. Михайлова

Рассматривается следующая экстремальная

Задача RSVS (Recognizing a Serial Vector Sequence). *Дано:* алфавит $\mathcal{U} = \{u^1, \ldots, u^K\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, последовательность $y_n \in \mathbb{R}^q$, $n \in \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$, и натуральные числа $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти:* совокупность $(u_1, \ldots, u_L)$ векторов из алфавита $\mathcal{U}$, а также наборы $\{\mu_1, \ldots, \mu_L\} \subseteq \{1, \ldots, M\}$ и $\{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N}$ такие,что

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{m=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} \{2(y_{n_m}, u_i) - \|u_i\|^2\} \to \max,$$

при ограничениях $T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}$, $m = 2, ..., M$, $0 = \mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_L = M$ на компоненты наборов $\{n_1, \ldots, n_M\}$ и $\{\mu_1, \ldots, \mu_L\}$.

К этой задаче сводится одна из актуальных проблем анализа данных. Суть проблемы заключается в помехоустойчивом распознавании последовательности y_n, $n \in \mathcal{N}$, как структуры, которая в отсутствие помехи состоит из L примыкающих подпоследовательностей, включающих серии из $\mu_i - \mu_{i-1}$ идентичных ненулевых векторов из алфавита $\mathcal{U}$ векторов евклидова пространства, перемежающихся с нуль-векторами; суммарное число ненулевых векторов в последовательности обозначено символом M. Частные случаи этой задачи, когда $L = 1$, $\mu_1 = M$, и когда $L = M$, $\mu_i - \mu_{i-1} = 1$, $i = 1, \ldots, M$, были рассмотрены в [1, 2]. Там же предложены эффективные алгоритмы, обеспечивающие точное решение указанных случаев этой задачи за время $\mathcal{O}(KN(N+q))$ и $\mathcal{O}(N(N+Kq))$ соответственно.

В настоящей работе для задачи RSVS обоснован полиномиальный алгоритм, реализующий схему динамического программирования и гарантирующий оптимальность решения за время $\mathcal{O}(KN^5(N+q))$. Ранее какие-либо эффективные алгоритмы с оценками точности для этой задачи отсутствовали.

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00090, № 11-01-00696, № 10-07-00195, № 11-07-12083-офи-м, грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты № 7Б и № 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Хамидуллин С.А., Окольнишникова Л.В. Распознавание квазипериодической последовательности, включающей одинаковые подпоследовательности-фрагменты // Сиб. журн. индустр. математики. – 2002. – Т. 5, № 4(12). – С. 38-54.
2. Кельманов А.В., Окольнишникова Л.В. Апостериорное совместное обнаружение и различение подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустр. математики. – 2000. – Т. 3, № 2(6). – С. 115-139.

© Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
факс (383)332-25-98, тел.: (383) 363-46-79, (383) 363-46-68,
E-mail: kelm@math.nsc.ru, mikh@math.nsc.ru

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА ВЕКТОРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.В. Кельманов, А.В. Пяткин

Рассматриваются следующие экстремальные задачи с натуральными параметрами $T_{\max} \geq T_{\min} \geq 1$.

Задача J**-MSSCS-NF**$(T_{\min}, T_{\max})$. *Дано:* последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, и положительное число A. *Вопрос:* существует ли разбиение множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J$ и $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J)$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \|y_{n_m} - \overline{y}(\mathcal{M}_j)\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J)} \|y\|^2 \leq A, \tag{1}$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}_j) = \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \sum\limits_{n \in \mathcal{M}_j} y_n$, $\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J = \{n_1, \ldots, n_M\}$, при ограничениях

$$T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max}, \ m = 2, \ldots, M, \tag{2}$$

на элементы набора $\{n_1, \ldots, n_M\}$?

Задача J**-MSSCS-F**$(T_{\min}, T_{\max})$. *Дано:* последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $M_1, \ldots, M_J$ и положительное число A. *Вопрос:* существует ли разбиение множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J$ и $\mathcal{N} \setminus (\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_J)$ такое, что имеет место неравенство (1) при условии, что $|\mathcal{M}_j| = M_j$, $j = 1, \ldots, J$, и при ограничениях (2) на элементы набора $\{n_1, \ldots, n_M\}$?

К этим задачам сводятся [1] актуальные проблемы анализа данных и распознавания образов.

Установлено, что обе задачи NP-полны в сильном смысле в случаях, когда: 1) $J = 1$ и $T_{\min} < T_{\max}$, 2) $J \geq 2$ и $T_{\min} \leq T_{\max}$. Если же $J = 1$ и $T_{\min} = T_{\max}$, то обе задачи разрешимы за полиномиальное время. NP-полнота задач установлена путем полиномиального сведения к ним классической задачи Максимальный разрез (MaxCut).

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00090, № 10-07-00195, № 11-07-12083-офи-м, грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), грантом EPSRC EP/F064551/1, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты № 7Б и № 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, № 11. – С. 2059-2067.

© Кельманов Александр Васильевич, Пяткин Артем Валерьевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-79, (383) 363-45-46, факс (383) 332-25-98.
E-mail: kelm@math.nsc.ru, artem@math.nsc.ru

ТОЧНЫЙ ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ NP-ТРУДНОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЕКТОРОВ

А.В. Кельманов, С.М. Романченко, С.А. Хамидуллин

Рассматривается следующее обобщение NP-трудной в сильном смысле [1] задачи поиска подмножества векторов.

Задача VSS2 (Vector Subsequence in a Sequence 2). *Дано*: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$ и $M > 1$. *Найти*: набор $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{M} \|y_{n_m} - \overline{y}(\mathcal{M})\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|}\sum_{n\in\mathcal{M}} y_n$, при ограничениях $T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max}$, $m = 2, \ldots, M$, на элементы набора $\mathcal{M}$.

К этой задаче сводится [1] одна из актуальных проблем анализа данных и распознавания образов. В работе [2] для задачи VSS2 предложен 2-приближённый полиномиальный алгоритм, имеющий временную сложность $\mathcal{O}(N^2(M(T_{\max} - T_{\min} + 1) + q))$.

В настоящей работе для случая, когда компоненты векторов последовательности $\mathcal{Y}$ целочислены, построен точный алгоритм, основанный на схеме динамического программирования, временная сложность которого есть величина $\mathcal{O}(N(M(T_{\max} - T_{\min} + 1) + q)(2MB + 1)^q)$, где B — максимальное абсолютное значение координаты векторов входной последовательности. Если размерность q пространства фиксирована, то алгоритм псевдополиномиален, так как $T_{\max} - T_{\min} + 1 \le N$ и $M \le N$.

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00090, № 10-07-00195, № 11-07-12083-офи-м, грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты № 7Б и № 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2010. – Т. 17, № 5. – С. 37-45.
2. Кельманов А.В., Романченко С.М. Хамидуллин С.А. Приближённые алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2012. – Т. 19, № 3 (принята в печать).

© Кельманов Александр Васильевич, Романченко Семён Михайлович,
Хамидуллин Сергей Асгадуллович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-79, факс (383) 332-25-98.
E-mail: kelm@math.nsc.ru; semenr@bk.ru; kham@math.nsc.ru

2-ПРИБЛИЖЕННЫЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

А.В. Кельманов, В.И. Хандеев

Рассматривается следующая NP-трудная [1, 2] в сильном смысле

Задача 1-MSSC-NF. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$. *Найти*: подмножество (кластер) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{y \in \mathcal{C}} y$ — центр кластера.

К этой задаче сводится [1, 2] одна из актуальных проблем помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов. Содержательная проблема заключается в разбиении таблицы с результатами измерения набора числовых характеристик некоторого объекта на два таких подмножества, что одно из них соответствует активному состоянию этого объекта, а другое — пассивному.

В настоящей работе обоснован 2-приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи, временная сложность которого есть величина $\mathcal{O}(qN^2)$. Суть алгоритмического решения состоит в следующем. Для каждого вектора из исходного множества строится гиперплоскость, перпендикулярная этому вектору и проходящая через его середину. Подмножество векторов, лежащих в полупространстве, не включающем начало координат, объявляется претендентом на решение. Для каждого подмножества-претендента вычисляется значение вспомогательной оценочной функции. В качестве решения выбирается подмножество, для которого значение этой функции минимально.

Работа поддержана грантами РФФИ № 12-01-00090, № 10-07-00195, № 11-07-12083-офи-м, грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 14.740.11.0362), а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты № 7Б и № 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – Т. 49, № 11. – С. 2059-2067.

2. Кельманов А. В., Пяткин А. В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, № 5. – С. 20-34.

© Кельманов Александр Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-79, факс (383) 332-25-98.
E-mail: kelm@math.nsc.ru

© Хандеев Владимир Ильич, Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (923) 139-15-83.
E-mail: vladimir.handeev@gmail.com

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ КОМИТЕТЕ В $\mathbb{R}^3$

К.С. Кобылкин

Рассматривается задача о минимальном комитете несовместной трехмерной системы строгих однородных линейных неравенств. К этой задаче сводится [1] известная труднорешаемая задача о покрытии конечного множества точек прямыми на плоскости. Задача о минимальном комитете несовместной системы

$$(c_j, h) > b_j,\ j \in N_m,\ c_j, h \in \mathbb{R}^2, b_j \in \mathbb{R}, \mathrm{rank}\{c_i, c_j\} = 2,\ i \neq j, \tag{1}$$

является удобной аппроксимацией трехмерной задачи. *Комитетом* [2] системы (1) называется такое конечное подмножество K из $\mathbb{R}^2$, что любому неравенству системы (1) удовлетворяет более, чем $|K|/2$ элементов из K. Комитет с наименьшей для данной системы (1) мощностью называется *минимальным*.

Пусть $i, j \in N_m$, $i \neq j$. Назовем i-е неравенство системы (1) *несущественным* в ней по отношению к j-му неравенству, если i-е неравенство входит во все максимальные по включению совместные подсистемы (МСП) системы (1), в которых содержится j-е неравенство. Обозначим через $\mathcal{J}(j, \Delta b_j)$ систему, полученную из системы (1) исключением неравенства $(c_j, h) > b_j$ и добавлением вместо него (с тем же номером j) неравенства $(c_j, h) > b_j + \Delta b_j$, где $\Delta b_j \in \mathbb{R}$. Через $\rho_1(i, j)$ обозначим нижнюю грань всех таких Δb_j, для которых i-е неравенство системы $\mathcal{J}(j, \Delta b_j)$ несущественно в ней по отношению к j-му, а через $\rho_2(i, j)$ — нижнюю грань всех таких Δb_j, что существует несовместная подсистема из трех неравенств системы $\mathcal{J}(j, \Delta b_j)$, включающая неравенства $(c_i, h) > b_i$ и $(c_j, h) > b_j + \Delta b_j$.

Теорема. Если $\min\{\rho_1(i, j), \rho_2(i, j)\} \leq 0$ для любых различных $i, j \in N_m$, то число элементов минимального комитета для (1) равно таковому для однородной системы

$$(c_j, h) > 0,\ j \in N_m.$$

Работа поддержана Президиумом УрО РАН (проекты №12-П-1-1016 и 12-С-1-1017/1), грантами РФФИ №10-01-00273 и 10-07-00134.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khachay M., Poberii M. Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. – 2009. – Vol. 20, № 11. – P. 217-234.
2. Мазуров Вл.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. – М.: Наука, 1990.

© Кобылкин Константин Сергеевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, Россия,
тел. (3433) 75-34-19, факс (3433) 74-25-81.
E-mail: kobylkin@imm.uran.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Ю.В. Коваленко

Рассматривается NP-трудная задача теории расписаний $1|l_{ij}|C_{\max}$. Задано множество работ I, которые должны быть выполнены на единственном имеющемся устройстве. Каждая работа $i \in I$ характеризуется длительностью $p_i \in \mathbb{R}^+$. Прерывание выполнения работ не допускается. В каждый момент времени устройство не может быть задействовано более чем в одной работе. При этом если устройство переключается с одной работы на другую, то необходимо выполнять переналадку. Пусть $l_{ij} \in \mathbb{R}_+$ – длительность переналадки с работы i на работу j для всех $i, j \in I$, где $i \neq j$. Требуется составить расписание, минимизирующее время завершения всех работ.

Обозначим через $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_{|I|})$ перестановку, определяющую порядок выполнения работ, а именно, π_k – работа, выполняемая k-той по счету, $k = 1, \ldots, |I|$. Пусть $l(\pi) = \sum_{k=1}^{|I|-1} l_{\pi_k, \pi_{k+1}}$. Тогда задача $1|l_{ij}|C_{\max}$ эквивалентна поиску такой перестановки π^*, при которой минимизируется суммарная длительность переналадки $l(\pi^*)$.

В настоящей работе исследуется задача поиска для произвольных заданных *родительских* решений π^1 и π^2 такой перестановки π', при которой:
1) $\pi'_k = \pi^1_k$ или $\pi'_k = \pi^2_k$ для всех $k = 1, \ldots, |I|$;
2) π' имеет минимальное значение целевой функции $l(\pi')$ среди всех перестановок, удовлетворяющих условию 1).

Поиск такой перестановки представляет собой задачу *оптимальной рекомбинации* и возникает при отыскании наилучшего возможного результата оператора кроссинговера в генетических алгоритмах для задачи $1|l_{ij}|C_{\max}$.

С использованием результатов [1] показана NP-трудность в сильном смысле задачи оптимальной рекомбинации 1) – 2) и разработан точный алгоритм ее решения. Доказано, что трудоемкость этого алгоритма полиномиальна для «почти всех» индивидуальных задач оптимальной рекомбинации.

Целесообразность решения задачи оптимальной рекомбинации 1) – 2) в операторе кроссинговера генетического алгоритма для $1|l_{ij}|C_{\max}$ подтверждена экспериментально на тестовых примерах из библиотеки [3]. В проведенном вычислительном эксперименте среднее время получения оптимума генетическим алгоритмом составляло не более 3% от полного времени работы точного метода, основанного на подходе [2].

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сердюков А.И. О задаче коммивояжера при наличии запретов // Управляемые системы. – ИМ СО АН СССР, 1978. – Вып. 17. – С. 80-86.
2. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large-scale traveling salesman problem // Operations Research. – 1954. – Vol. 2. – P. 393-410.
3. http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/

© Коваленко Юлия Викторовна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: juliakoval86@mail.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МЕТАЭВРИСТИК ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

И.В. Козин

Ряд прикладных задач дискретной оптимизации являются сложными. Известные точные алгоритмы поиска оптимума в подобных задачах сводятся к перебору решений и при больших размерностях не могут быть реализованы. Поэтому для таких задач оправдано применение метаэвристик различных классов. В соответствии с [1], метаэвристикой будем называть любой стохастический алгоритм (класс алгоритмов) поиска приближенных оптимальных решений задачи.

Рассмотрим случай, когда множество X является метрическим пространством с метрикой $\rho : X \times X \to R_1$. В метрическом пространстве X отрезком, соединяющим две точки $a, b \in X$, будем называть множество точек $[a, b] = \{z \in X : \rho(a, b) = \rho(a, z) + \rho(z, b)\}$. Выпуклым множеством в пространстве X будем называть множество, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит все точки отрезка, соединяющего эти две точки. Естественным образом определяется выпуклая оболочка $\bar{Y}$ подмножества $Y \subseteq X$, как пересечение всех выпуклых подмножеств в X, содержащих подмножество Y.

На шаге с номером k метаэвристики определяется некоторое конечное подмножество точек $X_k \subseteq X$. Сжимающими метаэвристиками будем называть такие алгоритмы поиска оптимума на множестве X, для которых справедливо условие $\bar{X}_{k+1} \subseteq \bar{X}_k$. Таким образом, пространство поиска для сжимающих метаэвристик ограниченно выпуклой оболочкой начального множества решений $\bar{X}_1$. Безусловно, такие метаэвристики не могут гарантировать приближение к глобальному оптимуму.

Другая группа метаэвристик направлена на расширение пространства поиска. Для этой группы на каждом шаге алгоритма имеет место соотношение $\bar{X}_{k+1} \neq \bar{X}_k$.

Идея состоит в объединении этих двух подходов и построении гибридной метаэвристики, которая на некоторых шагах уменьшает пространство поиска при увеличении среднего значения целевой функции, но может и расширять пространство поиска на отдельных шагах алгоритма для поиска глобального оптимума. В частности, по такому принципу построена метаэвристика на фрагментарных структурах, позволяющая отыскивать приближенные оптимальные решения для ряда дискретных оптимизационных задач [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Luke S. Essentials of Metaheuristics. A Set of Undergraduate Lecture Notes. September, 2009.
2. Козин И.В. Фрагментарные структуры и эволюционные алгоритмы // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб.наук.праць. – Дніпропетровськ, 2008. – С. 138-146.

© Козин Игорь Викторович,
Запорожский национальный университет,
ул. Яценко, 6-А, Запорожье, 69000, Украина, тел. (+380612) 34-57-38.
E-mail: ainc@ukrpost.net, ainc00@gmail.com

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОРЯДКА ПРЕЗЕНТАЦИИ МЕДИА-ОБЪЕКТОВ

П.А. Кононова

Рассматривается следующая задача, возникающая в мультимедиа. Имеется набор файлов, составляющих презентацию, каждый из которых должен быть сначала загружен в буфер компьютера, а затем просмотрен. Размер буфера ограничен. После просмотра файл удаляется из буфера и освобождает занятое место. Известно время загрузки каждого файла и время его просмотра. Время загрузки пропорционально размеру файла. Нельзя начинать загрузку файла, если свободного пространства в буфере недостаточно для помещения файла целиком. В [1] рассматривалась задача нахождения порядка загрузки файлов и их просмотра, при котором время окончания всей презентации будет минимальным при заданном размере буфера. В настоящей работе исследуется обратная задача, в которой необходимо найти буфер минимального размера для просмотра всех файлов за указанное время.

Обе задачи являются NP-трудными в сильном смысле [3], так как к ним сводится известная NP-трудная задача упаковки в контейнеры.

При построении точных и приближенных алгоритмов для решения обратной задачи необходимо находить оптимальное значение буфера для фиксированной перестановки файлов. Показано, что эта задача полиномиально разрешима при заданной длительности презентации.

Решение обратной задачи позволяет получить верхнюю оценку для прямой задачи при найденном размере буфера. Поэтому решение обратной задачи можно использовать для построения тестовых примеров для прямой задачи. Проводится сравнение решений прямой и обратной задачи, найденных с помощью локального поиска с чередующимися окрестностями [2]. Обсуждаются результаты численных экспериментов на случайно сгенерированных примерах при числе файлов до 50.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-07-00474).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононова П.А. Нижние и верхние оценки длины оптимального расписания презентаций медиа-объектов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19, № 1. – С. 59-73.

2. Кочетов Ю., Младенович Н., Хансен П. Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2003. – Т. 10, № 1. – С. 11-43.

3. Kononov A., Hong J.-S., Kononova P., Lin F.-C. Quantity-based buffer-constrained two machine flowshop problem: active and passive prefetch models for multimedia applications // Journal of Scheduling. (принята к печати) Journal of Scheduling DOI: 10.1007/s10951-011-0235-z. http://www.springerlink.com/content/82762q4066w16th8/

© Кононова Полина Александровна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: polinusik@gorodok.net

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ХАБОВ (USApHMP)

Н.А. Косарев

Рассматривается задача размещения p хабов (uncapacitated single allocation p-hub median problem, USApHMP), которая может быть сформулирована следующим образом. Имеется множество узлов сети $I = \{1, \ldots, m\}$, между которыми должна быть осуществлена транспортировка однородной продукции. Поставки осуществляются не напрямую из пункта отправления в пункт назначения, а через выделенные крупные центры – хабы, имеющие неограниченную пропускную способность. Каждый узел прикреплен к одному из хабов. Известны объем W_{ij} необходимых перевозок и стоимость C_{ij} транспортировки единицы товара для каждой пары пунктов i и j $(i, j \in I)$. Величины χ, α, δ – дисконтные коэффициенты для перевозок вида "пункт отправления $\to$ хаб" , "хаб $\to$ хаб" , "хаб $\to$ пункт назначения" соответственно. Соответственно, перевозка продукции из пункта i в пункт j при условии, что i подключен к хабу k, а j – к хабу l, осуществляется по маршруту $i \to k \to l \to j$, а ее стоимость равна $W_{ij}(\chi C_{ik} + \alpha C_{kl} + \delta C_{lj})$. Требуется выбрать p пунктов, в которых будут размещены хабы, а для каждого из оставшихся $m - p$ узлов определить прикрепление к одному из хабов таким образом,чтобы минимизировать суммарные затраты на транспортировку продукции.

В приведенной постановке даже определение оптимального прикрепления клиентов к уже открытым хабам является $\mathcal{NP}$-трудной задачей [2], поэтому неудивительно, что для распространенных тестовых примеров, содержащих 100 вершин и более, неизвестно оптимальных решений [1]. Нами предлагается точный параллельный алгоритм для решения данной задачи. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ilic A, Urosevic D, Brimberg J and Mladenovic N. Variable neighborhood search for solving the uncapacitated single allocation p-hub median problem // European J. Oper. Res. – 2010. – Vol. 206, № 2. – P. 289-300.
2. Love R.F., Moris J.G., Wesolowsky G. Facility location: Models and methods. Publication in Operations Research. 1988. – Vol. 7.

© Косарев Николай Александрович,
Омский научный центр СО РАН,
пр-т Маркса, 15/1, Омск, 644024, Россия, тел. (3812) 37-17-36, факс (3812) 37-17-62.
E-mail: nkosarev@mail.ru

АЛЬТЕРНИРУЮЩАЯ ЭВРИСТИКА ДЛЯ КОНКУРЕНТНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАКУПКАМИ

Н.А. Кочетова

Рассматривается следующая задача двухуровневого программирования. Два игрока – Лидер и Конкурент открывают свои предприятия для обслуживания клиентов, стремясь получить максимальный доход. Сначала принимает решение Лидер, затем Конкурент. Предприятия могут иметь различную привлекательность для клиентов. Каждый игрок имеет ограниченный бюджет на открытие предприятий и затрат на их привлекательности. Каждый клиент делает закупки во всех открытых предприятиях, принося тем самым доход обоим игрокам. Его вклад в доход того или иного предприятия прямо пропорционален привлекательности этого предприятия и обратно пропорционален расстоянию до него [1]. Лидер и Конкурент могут открывать предприятия в одном и том же месте. Задача Лидера заключается в том, чтобы так открыть предприятия и назначить им привлекательности, не выходя за рамки своего бюджета, чтобы извлечь максимальный доход, при наличии Конкурента, стремящегося максимизировать собственный доход.

Для решения этой задачи разработана следующая эвристика. При заданном решении одного игрока строится оптимальный ответ другого. Алгоритм останавливается, когда ни одному из игроков не удается увеличить свой доход в течение заданного числа итераций. На каждой итерации решается задача целочисленного линейного программирования специального вида. Наилучшее найденное решение (равновесие по Нэшу, если оно существует) предъявляется в качестве ответа. Приводятся результаты численных экспериментов для случая одинаковых бюджетов игроков и стоимостей открытия предприятий. В этом случае имеется очевидная верхняя оценка на максимальный доход Лидера. Разработанный алгоритм быстро находит равновесие по Нэшу для примеров с евклидовой матрицей расстояний. Получаемое решение, как правило, совпадает с верхней оценкой при размерности не более 50 мест для открытия предприятий и 50 клиентов. Исследуется зависимость дохода Лидера при разных бюджетах игроков.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00474.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aboolian R., Berman O., Krass D. Competitive facility location and design problem // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 182. – P. 40-62.

© Кочетова Нина Арнольдовна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-90, факс (383) 333-25-98.
E-mail: nkochet@math.nsc.ru

ТРЕХМЕРНАЯ УПАКОВКА ЦИЛИНДРОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЛЕПИПЕДОВ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ КОНТЕЙНЕР С УЧЕТОМ РАСПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

И.С. Кощеев

Рассматривается задача трехмерной упаковки цилиндров и параллелелепипедов в полубесконечный контейнер с учетом дополнительных ограничений (учет массы предметов).

Данная задача относится к классу задач трехмерной упаковки следующего содержания: задан контейнер (с известной длиной L, шириной W и бесконечной высотой), N_c – количество цилиндров (с известным радиусом r_i, высотой h_{ci} и массой m_{ci}), N_p – количество параллелепипедов (с известной длиной l_j, шириной w_j, высотой h_j и массой m_{pj}). Необходимо разместить предметы в контейнере таким образом, чтобы минимизировать расстояние между центром масс размещенных предметов и заданной точкой:

$min\{\rho(\overline{R_c}, \overline{T})\}$, где $\overline{R_c} = \frac{\sum \overline{s_{pj}} m_{pj} + \sum \overline{s_{ci}} m_{ci}}{\sum m_{pj} + \sum m_{ci}}$ – радиус вектор центра масс размещенных предметов, $\overline{T}$ – радиус вектор заданнай точки, $\overline{s_{pj}}$ – радиус вектор центра масс j-го параллелепипеда, $\overline{s_{c_i}}$ – радиус вектор i-го цилиндра, ρ – эвклидова метрика.

При этом необходимо выполнить следующие ограничения:

1. Стороны параллелелограммов параллельны сторонам контейнера.
2. Основания цилиндров параллельны нижней стенке контейнера.
3. Предметы не выходят за пределы контейнера.
4. Предметы не перекрываются друг с другом.

Рассматриваемая задача относится к классу NP-трудных. Предлагается метод решения, основанный на эволюционном алгоритме (1+1)EA и конструктивной эвристике $ABLP^{3D}$, являющейся логическим продолжением работ [1,2]. В сообщении рассматриваются результаты проведения экспериментов. Также обсуждается возможный подход к оценке нижней границы решаемой задачи.

Работа поддержана грантами РФФИ ИФ-ВК-23-10-ГФ и выполняется по хоздоговорной тематике ИФ-ВК-03-10-ХК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файзрахманов Р.И. Конструктивный вероятностный алгоритм для задачи размещения кругов и прямоугольников // Вестник УГАТУ. – 2010. – Т. 14, № 4(39). – С. 132-138.
2. Hifi M., Rym M'Hallah. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems// Computers & Operations Research. – 2004. – Vol. 31. – P. 675-694.

© Кощеев Иван Сергеевич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (987) 25-27-332.
E-mail: ivan.koscheev.ufa@gmail.com

ПОИСК НИЖНИХ ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ В КОНТЕЙНЕРЫ

И.М. Латыпов

В работе рассматривается задача размещения грузов параллелепипедной формы в контейнеры транспортных средств для дальнейшей перевозки. Предлагается математическая модель задачи, учитывающей технологические ограничения.

Задача трехмерной упаковки относится к классу NP-трудных задач. Поэтому для ее решения используются различные эвристики. Существует большое количество различных алгоритмов и подходов для решения задачи, позволяющих получать удовлетворительные решения за приемлемое время [3].

Для классической задачи трехмерной упаковки (без учета технологических ограничений) на базе гиперэвристических алгоритмов разработан алгоритм роевой гиперэвристики [4]. Модификация состоит в использовании механизма построения составных алгоритмов, основанном на алгоритме пчел.

Разработанный алгоритм был адаптирован для использования в практических задачах для перевозок грузов на транспортных средствах. В числе технологических ограничений: отсутствие больших пустот, провисаний в результирующем размещении, ограничения на устойчивость груза. Приводятся результаты экспериментов алгоритма в сравнении с другими известными алгоритмами.

Для оценки качества работы алгоритма предлагаются модели для поиска нижних границ задач трехмерной упаковки параллелепипедов. Модели строились на основе работ [1,2]. Модели основаны на релаксации исходной задачи упаковки. Приводится сравнение этих моделей между собой, а также с тривиальной границей по объему на основе экспериментов на тестовых наборах с известным оптимальным значением.

Работа поддержана грантами РФФИ ИФ-ВК-23-10-ГФ и выполняется по хоздоговорной тематике ИФ-ВК-03-10-ХК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scheithauer G. A new LP-bound for the Rectangle Packing Problem Preprint. – Dresden: TU Dresden, 1995.
2. Scheithauer G. LP-bounds for the Container and Multi-Container Loading Problem. – Dresden: TU Dresden, 1995.
3. Scheithauer G., Temo Y. Muller A., Lindeman R. Zuschnitprobleme und ihre praktische Losung. – Leipzig, 1987. – P. 207.
4. Latypov I., Forming Hyperheuristics with Bees Algorithm for Solving 3D Bin Packing Problem. CSIT 2010 Proceedings of the 12th International Workshop on Computer Science and Information Technologies. Russia, Moscow – St.Petersburg, September 13-19, 2010. – Vol. 2. – P. 61-65.

© Латыпов Ильшат Маратович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: latypov.ilshat@gmail.com

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О p–МЕДИАНЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МОЩНОСТИ

Т.В. Леванова, Е.А. Ткачук

Рассматривается задача о p-медиане с ограничениями на мощности в следующей постановке. Дано множество $I = \{1, ..., m\}$ мест возможного открытия предприятий и множество $J = \{1, ..., n\}$ клиентов. Известны мощности пунктов производства a_i и объёмы потребления b_j, а также транспортные затраты (t_{ij}) на обслуживание клиента j предприятием i. Необходимо разместить p предприятий таким образом, чтобы минимизировать общие транспортные затраты на обслуживание всех клиентов при условии удовлетворения их спроса. Пусть переменная x_{ij} принимает значение 1, если предприятие i обеспечивает клиента j, и равна 0 в противном случае. Математическая модель задачи имеет вид:

$$F(S) = \sum_{j \in J} \min_{i \in S} t_{ij} \to \min_{S \subseteq I} \ \textit{при условиях} \ \sum_{j \in J} b_j x_{ij} \leq a_i, i \in S, \mid S \mid = p.$$

Развивается подход к решению задач оптимального размещения, основанный на использовании мультиагентных систем (см., например, [1, 2]). Доклад посвящен разработке алгоритма пчелиного роя (АПР) для указанной задачи о p-медиане. Впервые АПР был представлен Lučić и Teodorović (2001) для задачи коммивояжера и в настоящее время находит всё большее применение [2].

Предложен вариант алгоритма пчелиного роя, содержащий локальный поиск по окрестности. Проведен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ разработанного алгоритма на задачах из библиотеки тестовых примеров OR-Library (http://people.brunel.ac.uk/mastjjb/jeb/info.html).

Работа поддержана грантом целевой программы СО РАН (интеграционным проектом № 7Б) и проектом Президиума РАН № 15.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Леванова Т.В., Лореш М.А. Алгоритмы муравьиной колонии для задач оптимального размещения предприятий // Омский научный вестник. – 2006. – № 4 (38). – С. 62-67.

2. Леванова Т.В. Некоторые алгоритмы искусственного интеллекта для решения задач оптимального размещения предприятий // Труды ИВМиМГ СО РАН. Сер. Информатика: Материалы Седьмой азиатской международной школы-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем”. – Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2011. – Вып. 10. – С. 119-124.

© Леванова Татьяна Валентиновна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: levanova@ofim.oscsbras.ru

© Ткачук Елена Анатольевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: tkachuk–lena@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭЛИМИНАЦИОННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Д.В. Лемтюжникова, О.А. Щербина

Перспективными методами структурной декомпозиции, использующими разреженность матрицы ограничений задач дискретной оптимизации (ДО), представляются локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА) [1].

Распараллеливание может существенно уменьшить время нахождения решений для задач ДО большой размерности, в связи с чем разработка методов параллельного поиска решений для задач ДО чрезвычайно актуальна.

Алгоритмическая схема ЛЭА представляет собой элиминационное дерево, вершины которого соответствуют локальным подзадачам, а ребра выражают зависимость подзадач друг от друга.

Для ЛЭА существуют следующие источники распараллеливания: независимые ветви элиминационного дерева и решение пакета задач ДО, соответствующих блокам. Для параллельной реализации ЛЭА могут использоваться системы с распределенной памятью: их параллельное программное обеспечение использует явную декомпозицию решаемой задачи на подзадачи и назначение их процессорам, а также быструю коммуникационную сеть, обеспечивающую синхронный обмен данными между процессорами. Программирование такой системы может осуществляться с помощью стандартного языка высокого уровня типа C++ или Fortran с явной передачей сообщений. Также может быть использована параллельная система программного обеспечения для решения задач смешанного ЦЛП — SYMPHONY. В настоящее время разработаны такие новейшие виды параллельных архитектур, как многоядерные процессоры, графические процессоры [2] и GRID-среды, применение которых могло бы существенно снизить время счета для ЛЭА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербина О.А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач // Журнал вычислительной математики и матем. физики. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 161-177.
2. Owens J.D. et al. GPU computing // Proc. IEEE. – 2008. – 96(5). – P. 879-899.

© Лемтюжникова Дарья Владимировна,
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 95007, Украина, тел. (0652) 51-64-98.
E-mail: darabbt@gmail.com

© Щербина Олег Александрович,
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 95007, Украина, тел. (0652) 51-64-98.
E-mail: oshcherbina@gmail.com

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СКЛАДИРУЕМЫМИ РЕСУРСАМИ

В.В. Леонов

Дан проект в виде сетевой модели $G = (V, E)$ – ориентированного взвешенного графа без контуров и петель. Элементы множества вершин V соответствуют событиям сетевой модели, а элементы множества дуг $E \subset V \times V$ – работам проекта. На выполнение работ выделяются складируемые ресурсы различных типов. Каждая работа задается длительностью и потребностью в ресурсах в каждый единичный интервал в течение выполнения этой работы. Прерывание работ не допускается. В множестве V выделено подмножество так называемых решающих событий, для каждого из которых задаются вероятности реализации дуг-работ, инцидентных данному решающему событию. В данном сообщении рассматривается два типа входов и четыре типа выходов. Модель проекта при наличии решающих событий называют стохастической сетевой моделью (ССМ) [1]. Анализ ССМ осуществляется после статистического розыгрыша заданного числа независимых реализаций модели.

Проект, описываемый конкретной реализацией $\widetilde{G}$ стохастической сети, считается выполнимым, если существует допустимое расписание работ $S(\widetilde{G})$, удовлетворяющее условиям предшествования и ресурсным ограничениям, выполняемое за минимальный срок в пределах планового периода [2]. В случае складируемости ограниченных ресурсов такое расписание находится за полиномиальное время [3].

Требуется найти эмпирическую функцию распределения времени выполнения проекта в пределах заданного планового периода. В данной работе предлагается программная реализация полиномиального алгоритма анализа описанной выше ССМ при ограничениях на ресурсы складируемого типа.

Работа поддержана грантом РФФИ (проекты 12-01-00093 и 10-07-00195), целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б), а также грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мироносецкий Н.Б., Сокольская Т.И. Алгоритм анализа стохастической сетевой модели // Методы моделирования и обработки информации.– Новосибирск: Наука, 1976. – С. 197-203.
2. Сокольская Т.И. Стохастическая сетевая модель с ограниченными ресурсами // Экономико-математические методы в управлении производством. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 54-59.
3. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В. Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 2, 2000. – Т. 7, № 1. – С. 9-34.

© Леонов Валентин Вячеславович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630000, Россия, тел. 8-923-108-63-36.
E-mail: leonov.valentin@gmail.com

РАСПИСАНИЕ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПРЕПОДАВАНИЕМ

А.М. Магомедов

В тексте использованы обозначения и определения книги [1]; в частности, в графе допускаются параллельные рёбра.

Исходные данные к расписанию учебных занятий преподавателей множества X с учебными группами множества Y представлены двудольным графом $G = (X, Y, E)$, где ребро (x, y) присутствует в множестве E тогда и только тогда, когда преподавателю x запланировано занятие с учебной группой y. Рёберную Δ-раскраску графа G определим как сюръекцию $E \to \{1, \ldots, \Delta\}$. Рёберную Δ-раскраску графа будем называть *интервальной*, если в любой вершине v графа цвета инцидентных рёбер образуют набор из $d_G v$ последовательных натуральных чисел. Под *непрерывным расписанием* будем понимать интервальную рёберную раскраску графа G.

Требуется указать необходимые и достаточные условия существования непрерывного расписания, допускающие эффективную проверку. В общем случае это оказывается невозможным, если гипотеза $P \neq NP$ верна: задача об интервальной раскраске NP-полна, даже если $d_G x = 6 \ \ \forall x \in X$, $d_G y = 3 \ \forall y \in Y$ [2].

Мы сформулируем эти условия для случая

$$d_G x = 2 \ \forall x \in X, \quad d_G y = \Delta \ \forall y \in Y. \tag{1}$$

Для каждой вершины $x_i \in X$ и инцидентных ей рёбер (x_i, y_j), (x_i, y_k) выполним замену конструкции $x_i, (x_i, y_j), (x_i, y_k)$ ребром (y_j, y_k); для полученного графа G' через $D(G')$ обозначим максимум отношения мощности множества рёбер подграфа $G'' \subseteq G'$ к мощности множества вершин подграфа G''.

Теорема 1. Пусть для графа $G = (X, Y, E)$ выполнены соотношения (1). Тогда для существования интервальной рёберной Δ-раскраски графа G необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$D(G') \leq \lfloor \Delta/2 \rfloor .$$

Работа поддержана гос.заданием 1.1923.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы – М.: Мир, 1984.
2. Casselgren C.J. On some graph coloring problems // Doctoral thesis N 48. Department of mathematics and mathematical statistics / Umeå university, Sweden. – 2011.

© Магомедов Абдулкарим Магомедович,
Дагестанский государственный университет,
ул. Гаджиева, 43А, Махачкала, 367000, Россия, тел. (8722) 64-97-96.
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

МУЛЬТИПРОЦЕССОРНАЯ ОБРАБОТКА С ОДНОВРЕМЕННЫМ НАЧАЛОМ

Т.А. Магомедов

В тексте использованы обозначения и определения из [1].

Пусть каждому процессору из множества $X = \{x_i\}$ выделен набор заданий из множества $Y = \{y_k\}$. Процессор x_i должен выполнить точно одну операцию над каждым выделенным ему заданием y_k; длительность каждой операции равна единице, запрещено участие процессора или задания в нескольких операциях одновременно, условия частичного предшествования отсутствуют. Требуется составить расписание, в котором все процессоры включаются одновременно и каждый процессор работает без простоев с момента включения до своего выключения. Такой режим востребован в ряде экономических задач.

Исходные данные к расписанию очевидным образом индуцируют двудольный граф $G = (X, Y, E)$, в котором ребро (x_i, y_k) присутствует тогда и только тогда, когда процессору x_i запланирована операция над заданием y_k. Выполнение операции процессором x_i над заданием y_k в дискретный момент времени j будем интерпретировать как присвоение ребру $(x_i, y_k) \in E$ метки j.

Задача о непрерывном расписании с одновременным началом. Найти разбиение множества рёбер E на паросочетания $E_1, \ldots, E_\Delta$ (E_j – набор всех рёбер графа, помеченных меткой j; каждое E_j соответствует набору всех операций, выполняемых в момент времени j, $1 \le j \le \Delta$), где для каждой вершины $x \in X$ метки рёбер, инцидентных x, образуют множество $\{1, \ldots, d_G x\}$.

Под преобразованием "вычисление и удаление" исходного графа $G = (X, Y, E)$ (а также графов – результатов применения данного применения) будем понимать *вычисление и удаление минимального паросочетания, насыщающего все вершины наибольшей степени.*

Теорема 1. Условия

$$d_G x_i \ge d_G y_k \quad \forall (x_i, y_k) \in E \tag{2}$$

инвариантны относительно преобразования "вычисление и удаление". При выполнении (2) *задача о непрерывном расписании с одновременным началом* всегда имеет решение.

Работа поддержана гос. заданием 1.1923.2011.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы – М.: Мир, 1984.

© Магомедов Тагир Абдулкаримович,
Дагестанский государственный университет,
ул. Гаджиева, 43А, Махачкала, 367000, Россия, тел. (8722) 64-97-96.
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ РАСПИСАНИЙ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Е.А. Мартынова, В.В. Сервах

Рассматривается задача календарного планирования инвестиционных проектов с ограничениями на финансовые ресурсы и критерием максимизации прибыли. Под проектом понимается множество взаимосвязанных работ $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Предполагается, что в год $t = 1, 2, \ldots, T$ имеются финансовые ресурсы в объеме $K(t)$, где T – период планирования проекта. Длительность работы $j \in V$ равна p_j, а требуемые вложения задаются величинами $k_j(\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots, p_j$. Выполнение работ приносит доход $c_j(\tau)$, которой может быть использован для дальнейшего финансирования. Отметим, что $c_j(\tau)$ являются случайными величинами.

В [1,2] предложен подход к оценке надежности расписания выполнения работ проекта. Расписание S оценивалось по следующим параметрам:

$NPV(S)$ – математическое ожидание чистой приведенной прибыли проекта;

$D(S)$ – дисперсия прибыли проекта;

$P(S)$ – вероятность того, что ограничения по ресурсам в некоторый момент времени будут нарушены, и проект не сможет быть продолжен.

Эти параметры позволяют анализировать различные расписания с точки зрения не только прибыли, но и рисков. С помощью такого подхода можно сравнивать расписания между собой, а также выяснять зависимость интересующих нас параметров от входных данных. В построенной модели учитывается возможность использования кредитов. Исследуется устойчивость расписаний к изменению объема начального капитала и процентной ставки по кредитам.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122 и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынова Е.А., Сервах В.В. Оценка надежности расписаний в задаче календарного планирования проектов // Сборник научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011. – Севастополь, 2011. – С. 229-231.

2. Гимади Э.Х, Моторина Н.Ю. Пляскина Н.И. Сервах В.В. Прибыль и риски при планировании инвестиционных проектов // Труды XV Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. Т. 6: Математическая экономика. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 93-98.

© Мартынова Евгения Андреевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: martynova87@mail.ru

© Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ СВОЙСТВА В ЛОГИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ

И.С. Масич

Создание и использование логических алгоритмов распознавания основывается на выявлении в исходных данных закономерностей, из набора которых формируется решающая функция. Поиск закономерностей можно рассматривать как задачу комбинаторной оптимизации, где критерием является покрытие закономерностью объектов выборки.

Для получения более эффективного решения выбор алгоритма оптимизации следует производить исходя из характерных свойств, присущих рассматриваемой оптимизационной задаче. В данной работе рассматриваются некоторые свойства задач оптимизации, решаемых в ходе поиска логических закономерностей в данных. Закономерности являются элементарными блоками для построения логических алгоритмов распознавания.

Результаты исследований показывают, что в пространстве поиска имеются множества постоянства целевой функции, то есть связанные множества, в которых функция принимает одинаковое значение. Наличие множеств постоянства затрудняет работу алгоритмов оптимизации, начинающих поиск из допустимой точки и ведущих его по соседним точкам, так как вычисление целевой функции в системе окрестностей, состоящей из соседних точек, не дает информации о наилучшем направлении поиска.

При решении практических задач больших размерностей это множество постоянства может быть таким, что ему принадлежит большая часть точек допустимой области. Это усложняет или делает невозможной работу таких алгоритмов как генетический алгоритм, локальный поиск с мультистартом.

Один из способов улучшить ситуацию – использовать информацию не только о покрытии закономерностью объектов выборки, но также использовать данные о расстоянии от множества точек, задаваемого закономерностью, до непокрытых пока объектов.

Результаты исследований показывают, что использование меры близости объектов выборки к закономерности позволяет преодолеть трудности, связанные с характерными особенностями решаемой задачи оптимизации и проявляющиеся в наличии множеств постоянства, и находить лучшие закономерности в данных для их использования в решении задач распознавания.

© Масич Игорь Сергеевич,
Сибирский государственный аэрокосмический университет М.Ф. Решетнева,
пр-т им. газ. “Красноярский рабочий”, 31, Красноярск, 660014, Россия,
тел. (391) 291-91-41.
E-mail: i-masich@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РАСПИСАНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ОДНОТИПНЫХ ДЕТАЛЕЙ

М.А. Межецкая

На производственной линии, состоящей из m различных машин, необходимо обработать партию N однотипных деталей. Обработка детали заключается в последовательном выполнении операций $O_1, O_2, ..., O_n$. Операция выполняется на машине m_i в течение p_i единиц времени. Машины в технологическом маршруте могут повторяться. Прерывания операций запрещены. Одновременное выполнение двух и более операций на одной машине не допускается. Требуется минимизировать время обработки всех деталей.

При большом количестве деталей удобно использовать циклические расписания [1]. Такие расписания обеспечивают ритмичность загрузки оборудования и исполнителей, позволяют эффективно планировать как поставки ресурсов, так и сбыт готовой продукции. Важно, что при расписании с минимальным временем цикла производительность линии максимальна. Некоторые потери происходят только при запуске партии в производство и ее завершении. Кроме того, оптимальное циклическое расписание строится за полиномиальное время.

Однако, циклические расписания не всегда эффективны, так как возникающие простои между операциями требуют дополнительных затрат на транспортировку и хранение незавершенных деталей. Более удобными оказываются периодические расписания [2].

Расписание называется *L-периодическим* со временем периода T, если для каждого $j = 1, 2, ..., n$ и натурального $k > L$ выполняется $t(j; k) = t(j; k - L) + T$, где $t(j; k)$ – время начала выполнения операции j детали k.

Периодические расписания, с одной стороны, сохраняют ритмичность производства, а с другой, позволяют улучшить другие производственные характеристики: время нахождения детали в системе, количество одновременно обрабатываемых деталей, общее время обработки и так далее. Это связано с тем, что циклические расписания являются подмножеством периодических, и на более широком классе некоторые параметры могут быть улучшены. В настоящей работе исследуются преимущества и недостатки периодических расписаний, их основные характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романова А.А., Сервах В.В. Оптимизация выпуска однотипных деталей на основе циклических расписаний // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, N 5. – С. 47-60.
2. Lee T., Posner M. Performance measure and schedules in periodic job shop // Operations Research. – 1997. – Vol. 45. – P. 72-91.

© Межецкая Мария Александровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 92-63-22.
E-mail: 1283@mail.ru

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АЛГОРИТМА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

А.А. Мельников

Рассматривается математическая модель для ситуации, в которой две соперничающие стороны, именуемые в терминологии игры Штакельберга [1] Лидером и Последователем, последовательно размещают свои предприятия в конечном дискретном пространстве, стремясь захватить потребителей и максимизировать свою прибыль. Каждый потребитель среди открытых обеими сторонами предприятий для своего обслуживания выбирает то предприятие, которое является наиболее привлекательным с его точки зрения. Таким образом задача размещения предприятий с предпочтениями потребителей обобщается на случай конкурентной борьбы двух сторон. Проблема поиска наилучшего размещения Лидера формулируется в виде задачи двухуровневого булева программирования [2,3]. В качестве допустимых решений этой задачи рассматриваются кооперативные и некооперативные решения. Для поиска оптимальных решений и решений с гарантированной оценкой точности предложен метод ветвей и границ. Проведены численные эксперименты, использующие в качестве входных данных примеры из библиотеки [4].

В данных примерах доступными для размещения предприятий местами, а также местами расположения потребителей являются вершины некоторого графа. Предпочтения потребителей задаются графовыми расстояниями. Число вершин в графах равно 20, 30, 40 и 50 для примеров из класса А и 25, 49 — для примеров класса Б. Класс примеров А порожден графами, образованными случайно выбранными на единичном квадрате точками, соединенными с некоторой вероятностью. Для примеров класса Б заранее задана графовая структура и меняются только числовые параметры, либо только числовые параметры и длины ребер графа.

Результаты экспериментов показывают эффективность предлагаемого алгоритма применительно к примерам малой и средней размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Stackelberg H. The theory of the market economy. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1952.
2. Береснев В.Л. Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, № 4. – С. 3-24.
3. Береснев В.Л., Мельников А.А. Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. – 2010. – Т. 17, № 6. – С. 3-19.
4. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks

© Мельников Андрей Андреевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: a.a.melnikov@hotmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТА С КРИТЕРИЕМ МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ

Д.С. Орлова

Пусть проект описывается сетевым графом $G = (V, E)$. В каждом единичном промежутке времени $[t-1, t)$, $t \in Z^+$, интервала планирования $[0, T)$ имеется $Q^k(t)$ ресурсов вида $k \in K$. Работа $j \in V$ характеризуется продолжительностью $p_j \in Z^+$, потребностью $q_i^k(\tau)$ в ресурсе вида k на интервале времени $[\tau - 1, \tau)$, $\tau = 1, \ldots, p_j$, и прибыльностью $c_j(s_j)$ работы j в зависимости от момента s_j начала выполнения работы. В предположении складируемости ораниченных ресурсов задача может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in V} c_j(s_j) & \longrightarrow & \max; \\ s_i + p_i & \leq & s_j, \quad (i,j) \in E; \\ \sum\limits_{t'=1}^{t} \sum\limits_{j \in N(S,t)} q_j^k(t' - s_j) & \leq & \sum\limits_{t'=1}^{t} Q^k(t'), \ k \in K; \\ s_j + p_j & \leq & T, \ j \in V, \end{cases}$$

где $N(S,t) = \{j \mid s_j < t \leq s_j + p_j\}$ — множество работ, выполняемых в интервале $(t-1, t]$, S — совокупность моментов s_j начал работ $j \in V$.

Данная задача NP-трудна несмотря на предположение о складируемости ресурсов [1, 2]. В данном сообщении для решения задачи предлагается приближенный алгоритм в предположении, что работам с положительной прибыльностью соответствуют максимальные элементы частичного порядка G. Представлены оценки сложности алгоритма. Алгоритм псевдополиномиален при константном числе прибыльных работ. Алгоритм тестировался на примере проектов освоения месторождений углеводородных ресурсов Восточной Сибири и Дальнего Востока.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00093, 10-07-00195), целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б), а также грантом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (гос. контракт 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gimadi E.Kh., Sevastianov S.V. On solvability of the project scheduling problem with accumulative resources of an arbitrary sign // Operations Research Proceedings. – Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 2003. – P. 241-246.
2. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности задачи календарного планирования проектов // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, Вып. 3. – С. 105-111.

© Орлова Дарья Сергеевна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-43-33.
E-mail: orlink@mail.ru

ЭЙЛЕРОВО ПОКРЫТИЕ С УПОРЯДОЧЕННЫМ ОХВАТЫВАНИЕМ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОГО ПЛОСКОГО ГРАФА

Т.А. Панюкова

Рассмотрим топологический граф на плоскости, т. е. плоский граф. Будем говорить, что цепь в графе имеет упорядоченное охватывание, если внутренность любой пройденной части цепи не содержит еще не пройденных ребер. Последовательность реберно-непересекающихся цепей, состоящая из цепей с упорядоченным охватыванием, называется покрытием с упорядоченным охватыванием. Такая последовательность минимальной мощности будет называться эйлеровым покрытием с упорядоченным охватыванием. Алгоритмы построения эйлеровых циклов и оптимальных покрытий с указанными свойствами для связного графа уже предложены в ранних работах автора. И самым интересным из рассмотренных случаев является построение оптимального покрытия с минимальной длиной дополнительных построений между концами соседних цепей.

Предложим алгоритм MultiComponentOptimalCover для построения оптимального эйлерова покрытия с упорядоченным охватыванием для многосвязного графа. Этот алгоритм работает с понятием «уровня вложенности», как и остальные алгоритмы поиска цепей с упорядоченным охватыванием.

Алгоритм MultiComponentOptimalCover

Шаг 1. Просмотреть все компоненты связности графа и определить уровень вложенности каждой из них.

Шаг 2. Отсортировать компоненты связности по убыванию значения уровня вложенности.

Шаг 3. Для каждой компоненты связности построить оптимальное эйлерово покрытие с упорядоченным охватыванием с помощью алгоритма, используемого для связного графа. Перейти в ближайшую компоненту связности, не включенную в покрытие.

Шаг 4. Останов.

Вычислительная сложность алгоритма составляет величину $O(|V|^2)$, где $|V|$ – число вершин графа. Такой алгоритм позволяет построить только допустимое покрытие с указанными свойствами. Что касается оптимальной длины дополнительных построений, то в данном случае компоненты связности следует упорядочить не только по уровням вложенности. Их следует подразделить на так называемые «вложенные сообщества» (когда компонента с уровнем вложенности k содержит в себе компоненты связности с уровнем вложенности больше k). Невозможно переключиться на построение покрытия в другом сообществе, пока имеются еще не пройденные ребра в текущем. Задача подразделения компонент связности на сообщества может быть решена на этапе распознавания компонент связности с помощью волнового алгоритма. Таким образом, эта задача имеет ту же вычислительную сложность, что и волновой алгоритм.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-96002-р_урал_а.

© Панюкова Татьяна Анатольевна,
Южно-Уральский государственный университет,
пр-т Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39.
E-mail: kwark@mail.ru

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ВЗВЕШЕННОЙ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОЙ РАСКРАСКЕ ГРАФА

К.Н. Пахомова

Пусть дан обыкновенный граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E – множество ребер, $n = |V|$, $m = |E|$. Каждой вершине $v \in V$ приписан вес $w(v) > 0$.

Раскраской графа G называется разбиение $P = (V_1, ..., V_k)$ множества V на попарно непересекающиеся подмножества $V_1, ..., V_k$, где V_i — независимое множество вершин графа, $i = 1, ..., k$. Число $k = |P|$ называется *мощностью раскраски.* Подмножества V_i — *цветные классы*, $i = 1, ..., k$.

Исследуется *взвешенная задача о минимальной раскраске графа* $G = (V, E)$: требуется найти такую раскраску $P_0 = (V_1, ..., V_k)$, чтобы минимизировать следующую функцию:

$$f(P_0) = \sum_{i=1}^{k} f(V_i), \tag{1}$$

где $f(V_i) = \max\{w(v)|v \in V_i\}$ – вес цветного класса, где $i = 1, ..., k$.

Известно, что данная задача является NP-трудной даже для двудольных графов [1]. Для приближенного решения задачи (1) предложен градиентный алгоритм.

Алгоритм $WCOL$.

Шаг 0. Упорядочить вершины графа: $w(v_1) \geq ... \geq w(v_n)$. Начать с тривиальной раскраски $P = (V_1, ..., V_n)$, где $V_i = \{v_i\}$, $i = 1, ..., n$; перейти на Шаг 1.

Шаг i $(i = 1, ..., n)$. Текущая раскраска P содержит множество V_i. Выбрать наименьший номер $j \in \{i + 1, ..., n\}$, такой, что множество $V_i \bigcup V_j$ независимо в графе G, $V_j \leftarrow V_i \bigcup V_j$, и удалить V_i из P. Если $i < n$, то перейти на Шаг $(i + 1)$, иначе $P_{WCOL} \leftarrow P$.

Конец.

Получены следующие гарантированные оценки точности алгоритма $WCOL$:

$$\frac{f(P_{WCOL})}{f(P_0)} \leq r_w \cdot \frac{\left\lfloor \frac{n+\chi(G)}{2} \right\rfloor}{r_w + \chi(G) - 1},$$

$$\frac{f(P_{WCOL})}{f(P_0)} \leq r_w \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n(n+1) - 2m}{r_w(n^2 - 2m) + 2m},$$

где P_0 – раскраска графа G минимального веса, P_{WCOL} – раскраска, полученная алгоритмом $WCOL$, $r_w = \max\{w(v)|v \in V\}/\min\{w(v)|v \in V\}$, $\chi(G)$ – хроматическое число графа G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Demange M., de Werra D., Monnot J., Paschos V.T. Time slot scheduling of compatible jobs // Journal of Scheduling. – 2007. – Vol. 10, № 2. – P. 111-127.

© Пахомова Ксения Николаевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: pakhomovak@bk.ru

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ НА ПЛОСКОСТИ

М.Г. Пащенко

На евклидовой плоскости задано конечное множество клиентов J с координатами $x_j \in R^2$ и объёмами потребления ω_j. На плоскости уже размещены предприятия Лидера. Будем считать, что для каждого клиента j определена функция привлекательности предприятий $A_j(\rho, \alpha) = \frac{a_j \alpha}{\rho^2}$, зависящая от расстояния ρ между клиентом и предприятием, положительного вещественного параметра α, отражающего уровень качества предприятия, и положительной константы a_j. Клиент обслуживается из предприятия с максимальным значением привлекательности. Обозначим через $A_j^\star$ максимальное значение привлекательности предприятий Лидера для клиента j. Задача Конкурента состоит в том, чтобы разместить на плоскости K предприятий и так установить им значения качества, чтобы максимизировать свою прибыль от обслуживания клиентов. В [1] рассматривалась данная задача при более общих предположениях на функцию привлекательности для единственного предприятия Конкурента. Прибыль задаётся следующей функцией: $P = c\sum_{j \in J^\star} \omega_j - \sum_k c_k \alpha_k$; где c и c_k положительные константы, α_k – уровень качества k-ого предприятия, а $J^\star$ – множество клиентов, обслуживаемое Конкурентом. Полагаем, что $j \in J^\star$, если для некоторого предприятия k с координатами $y_k \in R^2$ и уровнем качества $\alpha_k \in R^+$ выполнено неравенство $A_j(\rho(x_j, y_k), \alpha_k) \geq A_j^\star$.

Теорема. Пусть (y_k, α_k), $k = 1, ..., K$ — оптимальное решение задачи Конкурента. Тогда для каждого k найдется такое множество $T_k \subset J$, состоящее не более, чем из трех клиентов, что пара (y_k, α_k) является оптимальным решением следующей задачи: найти минимум α_k при ограничениях $A_j(\rho(x_j, y_k), \alpha_k) \geq A_j^\star$ для всех $j \in T_k$.

Эта задача имеет единственное решение, которое находится из геометрических соображений. Таким образом, для каждого k достаточно рассмотреть порядка $O(|J|^3)$ пар (y_k, α_k). Если значение K является константой, то получаем полиномиальный алгоритм решения задачи Конкурента с трудоемкостью $O(|J|^{3K})$. В противном случае задача Конкурента сводится к дискретной задаче о покрытии на максимум.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00474.

ЛИТЕРАТУРА

1. Plastria F., Carrizosa E. Optimal location and design of a competitive facility // Math. Program. – 2004. – Ser. A, № 100. – P. 247-265.

© Пащенко Михаил Георгиевич,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 347-68-33.
E-mail: pashch@ngs.ru

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ УНИГРАФОВ НА ОСНОВЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Р.А. Петрович

Граф, определяемый с точностью до изоморфизма списком степеней своих вершин, называется *униграфом* [1].

Униграф называется *наследственным униграфом*, если каждый его порожденный (вершинно) подграф также является униграфом [2]. Известно, что не все униграфы наследственные.

Обозначим HU класс всех наследственных униграфов. В [2] приведена характеризация класса HU в терминах конечного списка запрещенных порожденных подграфов и поставлена задача его характеризации исходя только из степеней вершин графа. Очевидно, что из конечности списка запрещенных порожденных подграфов вытекает, что задача распознавания "$G \in HU$" разрешима за полиномиальное время.

В представляемом сообщении предлагается схема решения вышеупомянутой задачи за линейное время на базе теории канонической декомпозиции графов (см. Тышкевич Р.И. [3]).

Схема характеризации выглядит следующим образом:

1) Поиск наследственных униграфов в каталоге неразложимых (относительно операции "композиция" из [3]) униграфов.

2) Доказательство утверждения: в списке запрещенных подграфов из [2] все элементы – неразложимые.

3) Доказательство утверждения: граф является наследственным униграфом тогда и только тогда, когда каждая его неразложимая компонента есть наследственный униграф.

Работа выполнена в БГУ в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011 – 2015 годы (ГПНИ Конвергенция).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tyshkevich R. Decomposition of graphical sequences and unigraphs // Discrete Math. – 2000. – Vol. 220. – P. 201-238.
2. Barrus M.D. On 2-switches and isomorphism classes. – Preprint submitted to Elsevier, 2011.
3. Тышкевич Р.И. Каноническое разложение графа // Доклады АН БССР. – 1980. – Т. 24, № 8. – С. 677-679.

© Петрович Роман Александрович,
Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь,
тел. (81037517) 209-50-47.
E-mail: raman.piatrovich@gmail.com

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А.В. Плясунов, А.А. Панин

Рассматривается вычислительная сложность задачи, которую можно описать в виде следующей игры Штаккельберга. На верхнем уровне Лидер выбирает пункты производства и для каждого из них назначает цену, которую выплачивает любой из потребителей за обслуживание в данном пункте. На нижнем уровне каждый из потребителей выбирает то предприятие, на котором транспортные затраты и затраты на приобретение продукции в сумме минимальны. Покупка совершается в том случае, когда это позволяет бюджет потребителя. Лидер стремится максимизировать свою прибыль, которая складывается из дохода за обслуживание потребителей за вычетом затрат, необходимых для открытия выбранных пунктов производства.

Стратегия ценообразования, использованная в постановке, называется фабричной (mill pricing) [1]. Помимо этой стратегии обычно рассматриваются следующие две стратегии. Равномерное ценообразование (uniform pricing) [1], т.е. на всех пунктах обслуживания устанавливается одна и та же цена. Дискриминационное ценообразование (discriminator pricing) – стратегия ценообразования, при которой могут быть ущемлены интересы каких-то групп покупателей [1].

Частный случай задачи, когда известны пункты производства и используется фабричное ценообразование, исследован в [2]. Эта задача NP-трудна в сильном смысле и лежит в классе *log-APX*. Постановки с равномерным и дискриминационным ценообразованием полиномиально разрешимы.

В настоящей работе показано, что задача размещения и ценообразования при любой стратегии выбора цен является NP-трудной в сильном смысле и принадлежит классу *poly-APX*.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00474.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hanjoul P., Hansen P., Peeters D. and Thisse J-F. Uncapacitated plant location under alternative spatial price policies // Market Sci. – 1990. – Vol. 36. – P. 41-57.
2. Плясунов А.В., Панин А.А. Точные и приближённые алгоритмы для одной задачи фабричного ценообразования // Дискрет. анализ и исслед. операций. – (в печати).

© Плясунов Александр Владимирович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383) 333-28-92, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: apljas@math.nsc.ru

© Панин Артём Александрович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: arteam1891@gmail.ru

ЭФФЕКТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ OPEN SHOP С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ ПРИ УСЛОВИЯХ ДОМИНИРОВАНИЯ

А.А. Подкожурникова, И.Д. Черных

Задача open shop с маршрутизацией рассматривалась в [1]. В этой постановке работы расположены в узлах транспортной сети, а машины, прежде чем выполнить операцию, должны доехать до соответствующего узла. Изначально все машины находятся в выделенной вершине, называемой *базой*, и должны туда вернуться после выполнения всех своих операций. Требуется построить допустимое расписание наименьшей возможной длины. В [1] показана NP-трудность этой задачи уже для случая с двумя машинами и двухвершинной сети. Заметим, что классическая задача open shop с двумя машинами полиномиально разрешима, причем оптимум совпадает с некоторой стандартной нижней оценкой $\bar{C}$, а трёхмашинная задача NP-трудна [2].

В [3] рассматриваются полиномиально разрешимые подклассы задачи open shop в терминах доминирования нагрузки одной из машин. Пусть p_{ji} — *длительность выполнения операции* работы J_j на машине M_i, $\ell_i = \sum_j p_{ji}$ — *нагрузка машины* M_i. Пусть машины занумерованы в порядке невозрастания нагрузок: $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_m$, а $\Delta = \ell_1 - \ell_2$ — *величина доминирования*. В [3] показано, что при $\Delta \geq (m-1)p_{\max}$ для $m \leq 4$ и при $\Delta \geq mp_{\max}$ для произвольного m задача open shop полиномиально разрешима, причем оптимум совпадает с максимальной нагрузкой ℓ_1.

В настоящей работе этот результат адаптируется для задачи open shop с маршрутизацией на двухвершинной транспортной сети. Показано, что для двухмашинной задачи условие $\Delta \geq p_{\max}$ является достаточным для того, чтобы оптимум совпадал с нижней оценкой $\bar{F}$ (при меньшем Δ это неверно). Получены некоторые оценки на минимально необходимую величину доминирования для большего числа машин.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00184.

ЛИТЕРАТУРА

1. Averbakh I., Berman O., Chernykh I. The Routing Open-Shop Problem on a Network: Complexity and Approximation // European J. Oper. Res. – 2006. – Vol. 173, № 2. – P. 531-539.
2. Gonzalez T., Sahni S. Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time // J.ACM. – 1976. – Vol. 23, № 4. – P. 665-679.
3. Севастьянов С. В., Черных И. Д. Достаточное условие эффективной разрешимости задачи open shop // Диск. анализ и исслед. опер. – 1996. – Т. 3, № 1. – С. 57-74.

© Подкожурникова Алёна Александровна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-43-33.
E-mail: ale-na-06@mail.ru

© Черных Илья Дмитриевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирк, 630090, Россия, тел. (383) 333-25-93.
E-mail: idchern@math.nsc.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА НА УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ С УСЛОВИЕМ ЖОРДАНА-ДЕДЕКИНДА

А.Б. Рамазанов

Известно (см., напр., [1]), что жадный алгоритм не всегда гарантирует получение оптимального решения в задаче дискретной оптимизации. Поэтому, нахождение условий оптимальности этого алгоритма является актуальным. В данной работе рассматривается задача максимизации порядково-выпуклой функции на конечных упорядоченных множествах, удовлетворяющих условию Жордана-Дедекинда. Используя меры изменения градиента (дискретный аналог градиента), получено достаточное условие оптимальности жадного алгоритма, которое дополняет ранее известные результаты (см., напр., [1]).

Пусть $H = (H, \prec)$ – множество, на котором задано отношение частичного порядка $\prec$. Функция $f : H \to R$ называется ρ-порядково-выпуклой [2], если $2f(y) - f(x) - f(z) \geq \rho, \quad \forall x \triangleright y \triangleright z$, где ρ – фиксированное неотрицательное действительное число; $x \triangleright y$ означает, что y непосредственно следует за x в H.

Правым градиентом функции $f(x)$, как обычно [1,2], называем функцию $\Delta^+ f(x) = \max\{f(y) - f(x) \,|x \triangleright y,\ x, y \in H\}$.

Мерой изменения градиента функции $f(x)$ будем называть величину:

$$c(f) = \begin{cases} \min\{(\Delta^+ f(x - \Delta^+ f(y))/\Delta^+ f(x)|(x,y) \in I\}, & \text{если} \quad I \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если} \quad I = \emptyset, \end{cases}$$

где $I = \{(x,y)|\Delta^+ f(x) > \Delta^+ f(y) \geq 0,\ x \triangleright y,\ x, y \in H\}$.

Рассматривается следующая задача A дискретной оптимизации: найти

$$\max\{f(x)|x \in H\},$$

где $f(x)$ – неубывающая ρ-порядково-выпуклая функция, частично упорядоченное множество H удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда [3].

Пусть x^* оптимальное решение задачи A, а x^g – решение, полученное с помощью жадного алгоритма [1, 2].

Теорема. *Если в задаче A $c(f) = 1$, то $f(x^*) = f(x^g)$.*

Замечание. Утверждение теоремы является только достаточным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. – Минск: Изд-во Университетское, 1987.
2. Emelichev V.A., Kovalev M.M., Ramazanov A.B. Errors of gradient extrema of strictly convex function of discrete argument // J. Discrete Math. and Appl. – 1992. – Vol. 2, № 2. – P. 119-131.
3. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982.

© Рамазанов Али Багдаш оглы,
Бакинский государственный университет,
ул. З. Халилова, 23, Баку, AZ1145, Азербайджан, тел. (99412) 438-15-54.
E-mail: rab-unibak@rambler.ru, ram-bsu@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ ОПЕРАЦИЙ НА ДВУХ МАШИНАХ ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТИЧНОГО ПОРЯДКА

А.А. Романова

Рассмотрим следующую задачу построения расписания. Имеются два множества операций $V_1 = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $V_2 = \{B_1, \ldots, B_n\}$. Операции множества V_k требуется выполнить на машине k, $k = 1, 2$. Длительности выполнения всех операций заданы. Прерывания и одновременное выполнение двух и более операций на одной машине не допускаются. Частичный порядок выполнения операций представлен двудольным графом $G = (V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $E = \{(A_i, B_j) | A_i \to B_j,\ A_i \in V_1, B_j \in V_2\}$ – множество дуг, задающих отношения предшествования между операциями.

Расписание является допустимым, если к началу выполнения каждой из операций B_j выполнены все операции на первой машине, связанные с ней отношениями предшествования. Необходимо найти допустимое расписание, при котором общее время завершения всех операций $C_{\max}$ минимально.

В [1] показано, что рассматриваемая задача является NP-трудной в сильном смысле как для произвольных, так и для единичных длительностей операций. В данной работе продолжается исследование задачи с единичными длительностями, начатое ранее в [2], где были выделены некоторые ее полиномиально разрешимые случаи.

Нетрудно показать, что задача сводится к нахождению последовательности π выполнения операций на первой машине. Обозначим через q наименьший номер такой, что $\sum\limits_{i=1}^{q} deg(A_{\pi_i}) > \sum\limits_{i=1}^{m} deg(A_{\pi_i}) - n$.

Утверждение. Пусть $C^*_{\max}$ – длина оптимального расписания, $C_{\max}(\pi)$ – наименьшая длина расписания при фиксированной последовательности π выполнения операций на первой машине. Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\frac{C_{\max}(\pi)}{C^*_{\max}} \le \frac{\max\{q+n, m\}}{\max\{n + d^A_{\min}, m + d^B_{\min}\}},$$

где $d^A_{\min} = \min\limits_{i=1,\ldots,m} deg(A_i)$, $d^B_{\min} = \min\limits_{j=1,\ldots,n} deg(B_j)$.

При упорядочении операций на первой машине по невозрастанию степеней соответствующих вершин получим наименьшую оценку погрешности. Построен класс примеров, для которых эта оценка достигается. Таким образом, предложен полиномиальный приближенный алгоритм решения задачи с достижимой оценкой точности.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen F., Lee C. Discrete Optimization: Minimizing the makespan in a two-machine cross-docking flow-shop problem // European Journal of Operational Research. – 2009. – Vol. 193. – P. 59-72.

2. Романова А.А., Чередова И.Б. Задача обработки деталей на двух машинах при наличии частичного порядка между операциями // Труды V Международной азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем". – Новосибирск, 2009. – С. 119-124.

© Романова Анна Анатольевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: romanova_ann@bk.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.А. Рыков, Э.Х. Гимади

Рассматривается следующая задача выбора подмножества векторов (m-ПВ): пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{R}^k$ задано конечное семейство векторов $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и натуральное число m, $m < n$. В множестве V требуется найти подмножество X векторов, состоящее из m векторов и обладающее максимальной нормой суммы

$$\Big\|\sum_{v\in X} v\Big\|_2 \to \max_{X\subset V,\ |X|=m}. \tag{1}$$

В общем случае задача m-ПВ является NP-трудной [1]. Однако при фиксированной размерности пространства k задача полиномиально разрешима [2].

Предлагаемый алгоритм A использует рандомизированное семейство направлений (векторов) $W = \{W_i\}(i = 1, \ldots, L)$, где каждый такой вектор выбирается случайно и независимо друг от друга. Для каждого W_i алгоритм находит m-набор векторов из V с максимальной суммой проекций на это направление, после чего в качестве приближенного решения задачи (1) выбирается m-набор векторов из V с наибольшей суммой проекций по всем $i = 1, \ldots, L$.

Теорема. *Алгоритм A находит приближенное решение задачи (1) со следующими оценками относительной погрешности, вероятности несрабатывания и временной сложности:*

$$\varepsilon = 1 - \cos\phi, \quad \delta_A \le \exp\left(-\frac{4\sin\phi^k}{\pi\sqrt{k}}L\right), \quad T_A = O(nkL).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00093 и № 10-07-00032) и Интеграционного проекта 2012-2014 ИМ СОРАН, ИММ УрО РАН, ИСЭМ СОРАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 2, 2007. – Т. 14, № 1. – С. 22-32.
2. Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А. О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. операций. – Сер. 2, 2008. – Т. 15, № 6. – С. 11-19.

© Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, факс (383)333-25-98.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

© Рыков Иван Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, факс (383)333-25-98.
E-mail: irykov@academ.org

О РЕАЛИЗАЦИИ ЛОКАЛЬНОГО ЭЛИМИНАЦИОННОГО АЛГОРИТМА С РЕЛАКСАЦИЯМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.В. Свириденко, О.А. Щербина

Перспективными методами структурной декомпозиции, использующими разреженность матрицы ограничений задач дискретной оптимизации (ДО), представляются локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА).

ЛЭА имеет декомпозиционный характер, т.е. сводит решение исходной задачи ДО большой размерности к решению ряда задач меньших размерностей, которые значительно проще решаются известными методами, т.е. с помощью имеющихся решателей.

Основным недостатком ЛЭА является большая вычислительная сложность решения задач ДО с большими сепараторами (перемычками между блоками). Для снижения объема перебора можно попробовать ввести в вычислительную схему ЛЭА релаксации, как это делается в алгоритмах ветвей и границ.

При решении подзадач, соответствующих блокам, нами предлагается использовать вместо значений целевой функции задач ДО значения целевых функций их релаксированных задач (*линейной релаксации*, когда вместо задачи ДО рассматривается соответствующая задача линейного программирования; *ранцевой релаксации*, в которой вместо ограничений исходной задачи рассматривается суррогатное ограничение, являющееся линейной комбинацией исходных ограничений).

Для проведения вычислительного эксперимента ЛЭА был реализован на базе фреймворка SYMPHONY, который используется для решения задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Все тестовые задачи ЦЛП с бинарными переменными из проводимого нами эксперимента имели искусственно сгенерированную квазиблочную структуру. Каждая тестовая задача решалась с помощью четырех подходов, в том числе использующих различные варианты ЛЭА. Первым брался базовый решатель SYMPHONY для задач ЦЛП. Далее применялся ЛЭА в сочетании с решателем SYMPHONY, с помощью которого решались выделенные подзадачи, соответствующие блокам. И, наконец, рассматривались 2 варианта алгоритма ЛЭА в сочетании с решателем SYMPHONY: с использованием линейной и ранцевой релаксаций. Результаты предварительного вычислительного эксперимента подтвердили целесообразность использования релаксаций в вычислительной схеме ЛЭА.

© Свириденко Александр Васильевич,
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 95007, Украина, тел. (0652) 51-64-98.
E-mail: oleks.sviridenko@gmail.com

© Щербина Олег Александрович,
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, 95007, Украина, тел. (0652) 51-64-98.
E-mail: oshcherbina@gmail.com

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА НЕРАВЕНСТВ В ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ ВЕРШИН АЦИКЛИЧЕСКОГО ОРГРАФА

Р.Ю. Симанчев, И.В. Уразова

Дан ациклический орграф G с множеством вершин V и множеством дуг E, $|V| = n$. Через $i \lessdot j$ обозначим предшествование вершины i вершине j. Упаковкой вершин орграфа G в полосу ширины m назовем функцию $\sigma : V \to D = \{1, 2, \ldots, d\}$, удовлетворяющую требованиям: 1) если $i \lessdot j$, то $\sigma(i) < \sigma(j)$; 2) $|\sigma^{-1}(k)| \leq m$ для каждого $k \in D$. Вектором инциденций упаковки σ называется такой вектор $x^\sigma \in \mathbb{R}^{nd}$, что $x^\sigma_{ik} = 1$ при $\sigma(i) = k$ и $x^\sigma_{ik} = 0$ в противном случае. Нас интересует многогранник M_d, который определяется как выпуклая оболочка векторов инциденций упаковок.

В рамках применения полиэдрального подхода к решению оптимизационных задач на многограннике M_d важную роль играют правильные неравенства. Неотъемлемой частью этой проблематики является задача идентификации, которая заключается в следующем: в данном классе правильных относительно M_d неравенств найти такое, которое отделяет данную точку $\bar{x} \notin M_d$ от многогранника M_d; либо доказать, что в рассматриваемом классе такого неравенства нет.

В [1] были построены два класса правильных относительно M_d неравенств и разработан полиномиальный алгоритм решения задачи их идентификации. В [2] предлагается еще один класс правильных относительно M_d неравенств. Он определяется следующим образом. Обобщенным t-дольным подграфом в ациклическом орграфе G называется такой подграф H, что 1) $V(H) = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_t$ и $W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$; 2) если $i \in W_\alpha, j \in W_{\alpha+1}$, то $i \lessdot j, \alpha = 1, 2, \ldots, t-1$; 3) вершины, содержащиеся в одной доле, попарно не связаны отношением предшествования.

Пусть $H \subset G$ – t-дольный подграф с упорядоченным списком долей $W_1, W_2, \ldots, W_t$, $k \in D$. Неравенство

$$\sum_{i \in W_1} \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} + \sum_{\alpha=1}^{t} \sum_{i \in W_\alpha} x_{ik} + \sum_{i \in W_t} \sum_{l=1}^{k-1} x_{il} \leq \max_{\alpha=1,2,\ldots,t} |W_\alpha|$$

является правильным относительно M_d.

В настоящем докладе предлагаются эвристические процедуры решения задачи идентификации неравенств этого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. Многогранник расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – № 1. – С. 87-92.

2. Уразова И.В. Класс правильных неравенств для задачи упаковки вершин ациклического орграфа в полосу заданной ширины // Вестник Омского университета. – 2011. – № 2 (60). – С. 48-52.

© Симанчев Руслан Юрьевич, Уразова Инна Владимировна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: osiman@rambler.ru, urazovainn@mail.ru

ПОИСК НАИМЕНЕЕ ПЛОТНОГО РЕГУЛЯРНОГО ПОКРЫТИЯ ПЛОСКОСТИ КРУГАМИ РАЗЛИЧНЫХ РАДИУСОВ

И.И. Тахонов

Пусть Ω – плоская область, а $\mathcal{C} = \{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m\}$ – набор кругов $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(x_i, r_i)$ радиуса r_i с центром в $x_i \in \Omega$, $i = 1, ..., m$. Будем говорить, что набор $\mathcal{C}$ является *покрытием* Ω, если $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{D}_i$. Среди всех покрытий выделяются так называемые *регулярные покрытия*, определяемые в [1] следующим образом. Покрытие $\mathcal{C}$ является *регулярным* из класса регулярности $COV_k(p, q)$, если:

- область Ω разбита на правильные k-угольники (плитки),
- все плитки покрываются единообразно p кругами q радиусов ($q \leq p$),
- каждая вершина плитки является центром одного из кругов.

Плотностью $\rho(\mathcal{C})$ покрытия $\mathcal{C}$ назовем отношение суммарной площади кругов к мере всей области Ω.

В работе исследуется задача поиска наименее плотного регулярного покрытия всей плоскости. Несмотря на то, что регулярные покрытия широко используются на практике (например, при построении беспроводных сенсорных сетей), а задача поиска наименее плотного покрытия – одна из классических задач вычислительной геометрии, проблема отыскания наименее плотного регулярного покрытия исследована слабо. В работе [2] было найдено оптимальное покрытие в классе $COV_3(3, 3)$. В [3] показано, что плотность покрытия, использующего круги двух радиусов, не может быть меньше 1.0189, и представлена серия регулярных покрытий из классов $COV_3(p, 2)$ (для достаточно больших p), плотность которых сколь угодно близка к минимальному значению. В работе [1] были найдены оптимальные покрытия в классах $COV_3(4, 4)$ (покрытие $T3$, $\rho(T3) \approx 1.108$) и $COV_4(5, 2)$ (покрытие $Q3$, $\rho(Q3) \approx 1.178$).

В докладе рассматриваются классы $COV_4(4, 4)$, $COV_4(5, 5)$ и $COV_4(6, 6)$. Показано, что покрытие $Q3$ является наименее плотным в классе $COV_4(4, 4)$, а также и в $COV_4(5, 5)$ при некоторых дополнительных условиях на соотношения радиусов кругов. Построены покрытия $Q5 \in COV_4(5, 5)$, $\rho(Q5) \approx 1.143$, и $Q6 \in COV_4(6, 6)$, $\rho(Q6) \approx 1.094$, являющиеся наименее плотными в своих классах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытия плоскости кругами // Дискр. анализ и исследование операций. – 2009. – Т. 16, № 3. – С. 3-19.
2. Kershner R. The Number of Circles Covering a Set // American Journal of Mathematics. – 1939. – Vol. 61, № 3. – P. 665-671.
3. Toth F.G. Covering the Plane with Two Kinds of Circles // Discrete & Computional Geometry. – 1995. – Vol. 13, № 3. – P. 445-457.

© Тахонов Иван Иванович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: takhonov@gmail.com

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ АГЕНТОВ МЕТОДОМ РОЯ ЧАСТИЦ

А.С. Филиппова, Е.В. Рагулина, К.М. Бадгетдинова

Рассматривается задача составления расписания как частный случай задачи маршрутизации. Она относится к классу NP-полных задач. Предлагается способ решения задачи методом роя частиц с оригинальным способом кодирования допустимого решения.

Постановка задачи. Транспортная сеть задана полным графом $G = (V, E)$, $V = v_0, \ldots, v_n$, где вершина v_0 интерпретируется как склад, а $v_1, \ldots, v_n$ – клиенты. Каждому ребру $e_{ij} \in E$; $i, j = 0, \ldots, n$ сопоставлена характеристика времени движения из пункта v_i в v_j, где $i, j = 0, \ldots, n$. Задано множество агентов $A = (a_1, \ldots, a_q)$. Требуется найти такое разбиение множества V на непересекающиеся подмножества $V = \bigcup\limits_{k=1}^{q} V^{a_k}$; $V^{a_k} \cap V^{a_l} = \varnothing$; $l \neq k$; $l, k = 1, \ldots, q$ и для каждого V^{a_k} определить последовательность вершин, то есть маршрут движения R^{a_k}, $k = 1, \ldots, q$ агента по клиентам. Расписанием R назовем множество маршрутов $(R^{a_1}, \ldots, R^{a_q})$ для всех агентов. Необходимо найти расписание R, для которого самый долгий по времени маршрут будет минимальным.

Кроме того, для общей постановки задачи возможен учет следующих условий: каждому клиенту приписывается некоторый промежуток времени в течение рабочего дня, когда продукция должна быть ему доставлена; устанавливается время разгрузки в каждом из пунктов; каждое транспортное средство должно выехать из депо и вернуться туда в течение рабочего дня самого депо.

Приводятся данные вычислительного эксперимента с алгоритмами роя частиц и $(1 + 1)$ – эволюционного алгоритма [1].

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luke S. Essentials of Metaheuristics // Lulu. – 2009. – P. 214-216.

© Филиппова Анна Сергеевна, Рагулина Елена Викторовна,
Бадгетдинова Карина Маратовна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 273-32-00.
E-mail: annamuh@mail.ru, elena.ragulina.ufa@gmail.com, summer.91@inbox.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДВУХЭТАПНОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

А.С. Филиппова, Э.И. Хасанова

Рассматривается задача сквозного (гильотинного) размещения прямоугольных предметов P_i $(i = \overline{1,n})$ на многосвязном ортогональном полигоне (многоугольник, внутри которого расположены препятствия). Задачу предлагается решать в два этапа. На первом — заданный многоугольник представляется в виде прямоугольной области с препятствиями, и далее проводится декомпозиция свободной области на прямоугольные боксы Π_k, $k = \overline{1,m}$, удовлетворяющие следующим условиям: ребра боксов параллельны ребрам области; боксы не перекрываются друг с другом, с препятствиями и гранями области; боксы покрывают всю свободную область полигона. На втором этапе решается задача размещения прямоугольных предметов внутри выделенных боксов Π_k. Решение задачи может быть представлено в виде набора: $GP = (x = x_{ki}, y = y_{ki})$, где (x_{ki}, y_{ki}) – координаты левого нижнего угла прямоугольника P_i в области Π_k. Набор является допустимым сквозным размещением, если выполняются следующие условия: ребра предметов параллельны ребрам бокса; предметы не перекрываются друг с другом и с гранями области; условие сквозного размещения. Требуется максимизировать коэффициент размещения [1] на множестве $GP = (x, y)$, удовлетворяющем поставленным условиям. Для реализации первого этапа был использован метод матричной декомпозиции [1]. На втором этапе использовался модифицированный эволюционный метод $(1 + 1) - EA$ [2]. Проведен численный эксперимент по исследованию зависимости получаемого коэффициента и затраченного времени от типа примеров, количества предметов, числа итераций, соотношения количества препятствий и количества предметов.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухачева Э.А., Валиахметова Ю.И., Хасанова Э.И., Телицкий С.В. Проектирование размещения ортогональных объектов на полигонах с препятствиями // Информационные технологии. – 2010. – № 10. – С. 16-22.
2. Мухачева Э.А., Хасанова Э.И. Гильотинное размещение контейнеров в полосе: комбинирование эвристических технологий // Информационные технологии. – 2009. – № 11. – С. 8-14.

© Филиппова Анна Сергеевна, Хасанова Элина Ильдаровна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 277-69-14.
E-mail: annamuh@mail.ru, xasel@mail.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ И АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ

М.Ю. Хачай, М.И. Поберий

В сообщении приводятся авторские результаты в области вычислительной сложности и аппроксимируемости для серии задач комбинаторной оптимизации, связанных с поиском минимального покрытия гиперплоскостями конечного подмножества конечномерного числового пространства. Интерес к перечисленным задачам обусловлен рядом актуальных приложений в распознавании образов и современной теории обучения [1,2]. По-видимому, впервые задача подобного типа, в постановке задачи о минимальном покрытии прямыми конечного подмножества плоскости (Min2PC), была описана в работе [3]. Там же показано, что эта задача NP-трудна в сильном смысле. В данной работе этот результат рекуррентно переносится на случай пространства произвольной фиксированной размерности, большей двух.

Далее в работе показывается, что с использованием техники К. Пападимитриу [4] полиномиальная сводимость Н. Мегиддо задачи MAX3SAT к задаче Min2PC может быть преобразована в L-редукцию задачи MAX3SAT(3) к этой же задаче, и далее, последовательно, к задачам Min-k-PC (при произвольном $k > 2$), что обосновывает Max-SNP-полноту всей серии задач (и, как следствие, невозможность построения для любой из них полиномиальной приближенной схемы, при справедливости условия $P \neq NP$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-00273, 10-07-00134) и УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Langerman S. and Morin P. Covering things with things // Discrete Computat. Geom. – 2005. – Vol. 33, № 4 – P. 717-729.
2. Хачай М.Ю. Вопросы вычислительной сложности процедур обучения распознаванию в классе комитетных кусочно-линейных решающих правил // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 3. – С. 178-189.
3. Megiddo N., Tamir A. On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. – 1982. – Vol. 1, № 5. – P. 194-197.
4. Papadimitriou Ch. Computational Complexity. – Addison-Wesley, 1995.

© Хачай Михаил Юрьевич, Поберий Мария Ивановна,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, Россия,
тел. (343) 375-35-05, факс (343) 374-25-81.
E-mail: mkhachay@imm.uran.ru, maschas_briefen@mail.ru

О ПЛАНАРНОЙ m-СЛОЙНОЙ 3-ИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧЕ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА МАКСИМУМ

О.Ю. Цидулко

Планарная m-слойная 3-индексная задача о назначениях на максимум в терминах подстановок из симметрической группы S_n имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j,\pi^{(i)}(j)} \longrightarrow max;$$

$$\pi^{(i)}(k) \neq \pi^{(s)}(k),\ 1 \leq i, s \leq m,\ i \neq s;$$
$$\pi^{(i)} \in S_n,\ 1 \leq i \leq m \leq n.$$

Известно, что задача NP-трудна при числе слоев $m \geq 2$ (см. в [3]). Отметим, что в частном случае $m = n$ данная задача является классической планарной 3-индексной задачей о назначениях (см. в [1]).

Далее предполагается, что элементы $m \times n \times n$-матрицы (c_{ijk}) – независимые случайные величины из интервала (a_n, b_n), $a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения.

В случае равномерного распределения в работах [2], [3] представлен вероятностный анализ приближенного алгоритма решения задачи на минимум. Показана его асимптотическая точность при соответствующих ограничениях на число m слоев матрицы (c_{ijk}) и отношение границ интервала (a_n, b_n) (вида $m \leq \ln n$ и $b_n/a_n = o(n/\ln n)$ в работе [2]).

В данном сообщении представлен анализ приближенного полиномиального алгоритма решения задачи на максимум, и показывается его асимптотическая точность безотносительно размеров интервала (a_n, b_n).

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-07-00093 и 10-01-00195), целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б), а также грантом ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (гос. контракт 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Burkard R., Dell'Amico M., Martello S. Assignment problems. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. – P. 402.
2. Gimadi E.Kh., Korkishko N.M. On some modifications of three index planar assignment problem // Discrete optimization methods in production and logistics. – Proc. DOM'2004, Omsk, 2004. – P. 161-165.
3. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В. Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. – Сер. 2, 2006. – Т. 13, № 1. – С. 10-26.

© Цидулко Оксана Юрьевна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-43-33.
E-mail: mahorita@mail.ru

РАЗРЫВЫ МЕЖДУ ОПТИМАЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В ПОЛОСУ И ЕЁ НИЖНИМИ ГРАНИЦАМИ

Г. Шайтхауэр, М.А. Мухачева

Рассматривается задача двумерной упаковки прямоугольников в полосу (SPP). Дан набор из n прямоугольников, заданных своими размерами: вектором ширин $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и высот $h = (h_1, \ldots, h_n)$, а также полубесконечная полоса фиксированной ширины W. Необходимо разместить прямоугольники в полосе таким образом, чтобы минимизировать высоту занятой части полосы. При этом должно выполняться условие непересечения прямоугольников.

Рассматриваются две задачи, с помощью которых находятся нижние границы задачи SPP. Первой является задача продолженного одномерного раскроя ($CCSP$), обсуждаемая в [1]. Вместо n прямоугольников размера $w_i \times h_i$ рассматривается n типов заготовок длины w_i, которые необходимо вырезать в количестве h_i штук из контейнера ширины W и высоты 1. Должны выполняться дополнительные ограничения:

1. Из контейнера можно вырезать только различные заготовки (*разнородность*).

2. Если не все заготовки типа i входят в текущий контейнер, то оставшиеся размещаются в следующих за ним контейнерах (*продолженность*).

Следующей является задача одномерного бинарного раскроя (BPP). В ней отменяется ограничение *продолженности* заготовок.

Множества входных данных перечисленных задач совпадают, при этом выполняется неравенство

$$z_{BPP} \leq z_{CCSP} \leq z_{SPP}$$

где z_{BPP}, z_{CCSP} и z_{SPP} – оптимальные значения задач BPP, $CCSP$ и SPP соответственно.

Основным результатом являтся следующая теорема:

Теорема. $h_0 \leq z_{BPP} \leq z_{SPP} \leq 2 \cdot h_0$, где $h_0 = max\left\{\frac{1}{W}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i h_i; max\{h_i : i = \bar{1,n}\}\right\}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыков И. О сравнении задачи упаковки в полосу с одной задачей календарного планирования // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, № 4. – С. 57-73.

© Dr. Guntram Scheithauer,
Dresden University of Technology, Institute of Numerical Mathematics
Willersbau C 317, Dresden, 01062, Germany, тел. (+49) (0351) 463 32002.

© Мухачева Марина Андреевна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 273-79-67.
E-mail: mukhacheva.marina@gmail.com

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА

Р.Э. Шангин

В работе рассматривается задача Вебера для простого неориентированного графа $G = (J, A)$ и конечного множества точек V:

$$F(\varphi) = \sum_{\{i,j\}\in A} c(\{i,j\}, \varphi(i), \varphi(j)) + \sum_{i\in J} p(i, \varphi(i)) \to \min_{\varphi},$$

где $\varphi : J \to V$ – однозначное отображение из множества J в V; J – множество объектов размещения; $A = \{(i,j) : i,j \in J\}$ – множество ребер графа G; $p : J \times V \to R^+ :\ p(i, \vartheta_i)$ – затраты размещения элемента $i \in J$ в точке $\vartheta_i \in V$; $c : A \times V^2 \to R^+ : c(\{i,j\}, \vartheta_i, \vartheta_j) : (i,j) \in A, \vartheta_i, \vartheta_j \in V$ – стоимость размещения ребра графа G на V^2.

Известно, что задача Вебера, как и квадратичная задача о назначениях, где отображение $\varphi : J \to V$ однозначно и инъективно, являются NP-трудными [1, 2]. Несмотря на NP-трудность задачи Вебера, известны полиномиальные алгоритмы для некоторых частных случаев [2, 3]. Также известны приближенные и эвристические алгоритмы для задачи Вебера [4].

В работе предлагаются эвристические алгоритмы, основанные на методе динамического программирования, решающие поставленную задачу за полиномиальное время. Исходя из специфики данных алгоритмов, предлагаются пути совершенствования, направленные на увеличение точности решения, заключающиеся в сочетании методов динамического программирования с алгоритмами локальной и стохастической оптимизации. Исследуются свойства окрестностей, используемых в алгоритмах локальной и стохастической оптимизации.

Проводится сравнение эффективности предложенных алгоритмов, как между собой, так и с другими известными эвристическими алгоритмами, причем под эффективностью понимается точность алгоритма и время вычислений. Найдены классы задач, на которых предложенные алгоритмы являются точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шангин Р.Э. Сравнение эффективности приближенных алгоритмов решения одного частного случая задачи размещения // Статистика. Моделирование. Оптимизация: сборник трудов Всероссийской конференции. – Челябинск, 2011.
2. Panyukov A.V., Pelzwerger B.V. Polynomial algorithms to finite Veber problem for a tree network // Journal of Comput. and Applied Math. – 1991. – Vol. 35. – P. 291-296.
3. Zabudsky G.G., Filimonov D.V. An algorithm for minimax location problem on tree with maximal distances // Proc. of the Second International Workshop “Discrete Optimization Methods in Production and Logistics”. – Omsk-Irkutsk, 2004. – P. 81-85.
4. Шангин Р.Э. Исследование эффективности приближенных алгоритмов решения одного частного случая задачи Вебера // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – Москва, 2012. – № 1. – С. 163-169.

© Шангин Роман Эдуардович,
Южно-Уральский государственный университет,
пр-т Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия.
E-mail: shanginre@gmail.com

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ ОДНИМ ПРИБОРОМ

Н.Ю. Шерешик

Рассматривается следующая задача теории расписаний. Задано множество $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ требований, которые необходимо обслужить. Каждое требование $i \in V$ имеет положительный вес ω_i и время ожидания r_i, т.е. время, в течение которого оно недоступно для обслуживания. Требования обслуживаются одним прибором. В обслуживании любого требования $i \in V$ допускаются прерывания. Длительности p_i обслуживания требований равны между собой $p_i = p, i = 1, 2, \ldots, n$. Необходимо минимизировать суммарное взвешенное время завершения обслуживания всех требований. В [1] эта задача упоминается как $1|pmnt; p_i = p; r_i| \sum \omega_i C_i$, где C_i – время завершения обслуживания требования i. Определена величина d - директивный срок окончания обслуживания всех требований. Априори эта величина не известна, но ясно, что её всегда можно выбрать. Соответственно дискретные единичные моменты обслуживания требований могут быть перенумерованы как $k = 1, 2, \ldots, d$. Расписанием обслуживания требований является $(0, 1)$-вектор $x \in \mathbb{R}^{nd}$ с координатами:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если требование } i \text{ в момент } k \text{ находится в обработке,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим Σ_d как множество всех расписаний обслуживания требований при данном директивном сроке и $C_i(x)$ – время окончания обслуживания требования i при данном расписании x. В введённых обозначениях задача имеет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i C_i(x) \to \min \text{ при } x \in \Sigma_d.$$

В работе [2] доказано, что оптимальное расписание лежит в $\Sigma_{d_{\min}}$, где $\Sigma_{d_{\min}} \neq \oslash$, а $\Sigma_{d_{\min}-1} = \oslash$. Учитывая это, в настоящей работе сформулировано условие декомпозиции задач. Пусть $r_i \leq r_{i+1}$, для любого $i \in V$. Исходную задачу можно представить в виде композиции задач меньшей размерности, если существует такой $i \in \{1, ..., n-1\}$, что $\sum\limits_{j=1}^{i} \alpha_j \geq jp$, где $\alpha_j = r_{j+1} - r_j$. Для задач, удовлетворяющих этому условию, предложен алгоритм декомпозиции. Доказано, что оптимальные решения задач меньшей размерности в совокупности дают оптимальное решение исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peter Brucker. Scheduling Algorithms. Fifth edition. – Germany, 2006.
2. Симанчёв Р.Ю., Шерешик Н.Ю. Схема дихотомии для поиска минимального директивного срока в задаче обслуживания различных требований одним прибором // Сборник трудов Всерос. конф. “Статистика. Моделирование. Оптимизация”. – Челябинск, 2011. – С. 159-161.

© Шерешик Николай Юрьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: m-m_pikm@mail.ru

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБЫЛЬНЫХ РАБОТ

Т.А. Щербинина

Имеется проект, который состоит из множества взаимосвязанных работ $V = \{1, 2, \ldots, N\}$. Взаимосвязь между работами задается отношениями предшествования вида $i \to j$, где работа j не может начаться до завершения работы i. Данная структура может быть представлена ориентированным ацикличным графом $G = (V, E)$, где V – множество вершин, а $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \to j\}$ – множество дуг. При выполнении работ используется один тип складируемого ресурса. На период планирования T в интервале времени $[t-1, t)$ имеется q_t единиц складируемого ресурса. Каждая работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$ и потребностью $r_j(\tau)$ в ресурсе в момент времени τ, $\tau = 1, 2, \ldots, p_j$.

Работа как потребляет финансовые ресурсы, так и генерирует их. Обозначим через $c_j(\tau)$ платеж работы j в момент времени τ, $\tau = 1, 2, \ldots, p_j$. Если $c_j(\tau) < 0$, то в момент τ для выполнения работы требуются соответствующие капиталовложения, а если $c_j(\tau) > 0$, то выполнение данной работы приносит доход. Последовательность величин $(c_j(1), c_j(2), \ldots, c_j(p_j))$ называется *потоком поступлений* работы $j \in V$. Пусть NPV_j – чистая приведенная прибыль работы $j \in V$. Если $NPV_j > 0$, то работа называется *прибыльной*. Предполагается, что все работы выполняются непрерывно.

Требуется определить допустимое расписание выполнения работ проекта S с учетом технологического порядка и ограничений на ресурсы, при котором чистая приведенная прибыль проекта максимальна:

$$NPV(S) = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1 + r_0)^{s_j}} \to \max,$$

где r_0 – цена капитала на рынке, или базовая процентная ставка.

В [1] доказана *NP*-трудность в сильном смысле рассматриваемой задачи даже без учета реинвестирования. В настоящей работе предложена модификация алгоритма динамического программирования решения задачи календарного планирования с фиксированным числом прибыльных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности одной задачи календарного планирования со складируемыми ресурсами // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, Вып. 3. – С. 105-111.

© Щербинина Татьяна Александровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия.
E-mail: shcherbinina@bk.ru

STRATEGIC PLANNING IN COGNITIVE RADIO NETWORKS:
A COMPETITIVE FACILITY LOCATION GAME PERSPECTIVE

S. Iellamo, L. Chen, M. Coupechoux, Yu. Kochetov

We consider a primary network operating on a set of frequency bands licensed to an independent entity (e.g., private company, telecommunication operator) or controlled by a government agency, either of which we refer to as a primary user. A cognitive radio operator (the leader) wants to deploy a durable secondary network by opportunistically using the unused capacity of the primary network. To this end, the operator places a set of own base stations and tunes the correspondent transmission power so as to maximize the profit drawn from the served clients.

The operator has to:

- ensure that the deployment of the secondary network does not impair the primary network. In other words, the received power of the secondary network on each channel must be controlled under a given interference temperature threshold at a given measurement point;
- pay for each base station under the budget constraint;
- find a solution which will be robust face to the arrival of a possible competitor (the follower) that might come up in the near future, place his own base stations and capture clients.

We formulate the problem as a bilevel facility location problem. We apply to the leader problem a hybrid probabilistic tabu search algorithm and, at each step, we solve the mixed integer program derived from the follower problem. We show that the follower problem is NP-hard and that the Stackelberg game associated to the leader problem is Σ_2^P-hard.

© Stefano Iellamo, Marceau Coupechoux,
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications Département Informatique et Réseaux 23 Avenue d'Italie CS 51327 75214 Paris Cedex 13.
E-mail: dajelvento@gmail.com, marceau.coupechoux@telecom-paristech.fr

© Lin Chen,
Maître de Conférences Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI) Université de Paris-Sud XI Bâtiment 650 91405, Orsay Cedex.
E-mail: Lin.Chen@lri.fr

© Yuri Kochetov,
Sobolev Institute of Mathematics, 4 Acad. Koptyuga ave., 630090 Novosibirsk, Russia, phone (383) 363-46-89, fax (383) 333-25-98.
E-mail: jkochet@math.nsc.ru

ПРОЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПО ТИХОНОВУ

А.С. Величко

Для задачи нелинейной оптимизации $\min\limits_{x\in V} h(x)$ с выпуклой гладкой функцией $h(\cdot)$ на непустом множестве $V \subset R^n$, заданном линейными ограничениями-неравенствами, рассматривается ее представление в виде задачи $\min\limits_{x\in V;u} u$ с ограничениями $h(x) \leq u$. Пусть $Z = (x,u) \in V \times R \subset R^{n+1}, f(z) = u$. Предлагаемый проективный алгоритм заключается в последовательном взятии внешних линейных аппроксимаций для выпуклых ограничений $g(z) = h(x) - u \leq 0$ в точке z^k на k-ом шаге алгоритма и поиска проекции точки $(z^k - \lambda_k \nabla f(z^k))$ на пересечение множества Z и множества, образованного совокупностью внешних линейных аппроксимаций для ограничений $g(z) \leq 0$, которые были получены на предшествующих k шагах алгоритма. Здесь λ_k – последовательность шаговых множителей, $\nabla f(\cdot)$ – градиент функции f.

С другой стороны, к исходной нелинейной задаче в пространстве R^n могут применяться проективные алгоритмы типа $x^{k+1} = P_V(x^k - \lambda_k \nabla h(x^k))$ с различными регулировками шаговых множителей [1], где $P_V(\cdot)$ – оператор проекции точки на множество V.

В данной работе рассматриваемые проективные алгоритмы используются при решении одномерного интегрального уравнения Фредгольма методом регуляризации по Тихонову с различными видами стабилизирующих функционалов, в том числе с недифференцируемыми компонентами [2]. Восстановление негладких решений требует мелкой сетки, что порождает задачи большой размерности.

Так, для уравнения $\int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds = y(t)$ можно записать задачу оптимизации

$$\min_{\{u_j\}}\Big\{\sum_{i=1}^{m} h\Big(\sum_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big)^2 + \alpha h\sum_{j=1}^{n} u_j^2 + \alpha\sum_{j=1}^{n-1}|u_{j+1}-u_j|\Big\},$$

где h – шаг сетки, α – параметр регуляризации. Введением новых неотрицательных переменных $v_j = |u_{j+1} - u_j|$ и ограничений вида $v_j \geq u_{j+1} - u_j, v_j \geq -(u_{j+1} - u_j)$ получим эквивалентную квадратичную задачу с линейными ограничениями.

Работа поддержана грантами ДВО РАН 12-III-B-01И-010, 12-III-A-01И-014.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нурминский Е.А. Фейеровские алгоритмы с адаптивным шагом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2011. – Т. 51, № 5. – С. 791-801.
2. Васин В.В., Сережникова Т.И. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 2. – С. 15-23.

© Величко Андрей Сергеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (423) 231-04-04, факс (423) 231-04-52.
E-mail: vandre@dvo.ru

МОНОТОННЫЙ МЕТОД ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Е.А. Воронцова

В n-мерном евклидовом пространстве E_n рассматривается разрешимая задача безусловной выпуклой недифференцируемой оптимизации

$$\min_x f(x) = f(x^*) = -f^*(0), \tag{1}$$

где $f(x)$ – выпуклая функция, $f^*(g) = \sup_x\{xg - f(x)\}$ – сопряженная к f.

Существует значительное количество методов решения таких задач (см., например, [1-3]). В настоящей статье предлагается дальнейшее развитие и усовершенствование метода [4], который имеет ряд важных теоретических и вычислительных особенностей.

Задача (1) эквивалентна задаче нахождения корня субградиентного отображения: $x^* \in \partial f^*(0)$. В методе отделяющих плоскостей (МОП) надграфик $\operatorname{epi} f^*$ аппроксимируется внутренним и внешним образом некоторыми выпуклыми множествами. Уточняя на каждой итерации эти аппроксимации в окрестности вертикальной оси $0 \times \mathbf{R}_+$, получим сходящиеся нижние и верхние границы для $f^*(0)$.

Базовый вариант МОП не гарантирует монотонность, особенно при подходе к экстремуму. Для улучшения свойства монотонности метода предлагается ввести дополнительное отсечение по верхней оценке $f^*(0)$, полученной из внутренней аппроксимации надграфика:

$$\sup_{(g,\,\epsilon)\,\in\,\operatorname{epi} f^*;\ \epsilon \le \bar{v}} \{gx - \epsilon\}, \tag{2}$$

где оценка $\bar{v}$ представляет собой решение линейной задачи $\bar{v} = \min \epsilon$ при условии, что $(0,\,\epsilon) \in \operatorname{co}((g^k,\, f^*(g^k)),\, k = 1, 2, ...) + 0 \times \mathbf{R}_+$. После некоторых преобразований задача (2) сводится к задаче одномерной минимизации негладкой функции.

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (проект 12-III-A-01И-014).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hiriart-Urruty J.-B., Lemarechal C. Convex analysis and minimization algorithms II: Advanced theory and bundle methods. Fundamental Principles of Mathematical Sciences 306. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
2. Шор Н.З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации. – Кишинэу: Эврика, 2012.
3. Нурминский Е.А. Численные методы выпуклой оптимизации. – М.: Наука, 1991.
4. Нурминский Е.А. Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации // Вычислительные методы и программирование. – 2006. – Т. 7. – С. 133-137.

© Воронцова Евгения Алексеевна,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия.
E-mail: vorontsovaea@gmail.com

АЛГОРИТМЫ ОТСЕЧЕНИЙ БЕЗ ВЛОЖЕНИЯ ПОГРУЖАЮЩИХ МНОЖЕСТВ

И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин

Для общей задачи математического программирования предлагаются алгоритмы, относящиеся к классу методов отсечений (напр., [1]). Алгоритмы характерны тем, что в них не требуется последовательного вложения каждого из аппроксимирующих множеств в предыдущее. За счет этого предлагаемые алгоритмы имеют определенные преимущества перед некоторыми известными методами названного класса.

Пусть множества D_j, $j \in J$, и D'' из R_n выпуклы и замкнуты, $D' = \bigcap\limits_{j \in J} D_j$, $D = D' \bigcap D''$, и $intD_j \neq \emptyset$, $j \in J$. Пусть непрерывная функция $f(x)$ достигает на D минимального значения f^*.

Положим $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $E^* = \{x \in R_n : f(x) \leq f^*\}$.

Для решения задачи $min\{f(x)|x \in D\}$ предлагается метод, заключающийся в следующем. Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее хотя бы одну точку $x^* \in X^*$, выбираются точки $v^j \in intD_j$, $\forall j \in J$, полагается $k = 0$, $i = 0$.

1. Находится точка $y_i \in M_i \bigcap D'' \bigcap E^*$, полагается $J_i = \{j \in J : y_j \notin D_j\}$.

2. Для каждого $j \in J_i$ в интервале (v^j, y_i) находится точка $z_i^j \notin intD_j$, удовлетворяющая определенному требованию. Выбирается некоторое подмножество $H_i \subset J_i$.

3. Для каждого $j \in H_i$ выбирается множество A_i^j обобщенно-опорных к D_j в точке z_i^j векторов и полагается $M_{i+1} = Q_i \bigcap \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^j \rangle \leq 0 \; \forall a \in A_i^j\}$. Множество Q_i задается здесь следующим образом. Если точка y_i не удовлетворяет определенному условию близости ее к множеству D', то полагается $Q_i = M_i$. В противном случае в качестве Q_i выбирается любое подмножество множества M_0, содержащее точки y_i и x^*, и при этом полагается $x_k = y_i$, а значение k увеличивается на единицу. Далее следует переход к п.1 при i, увеличенном на единицу.

Доказано, что любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ принадлежит X^*, а если $\{f(x_k)\}$ монотонно возрастает, то вся последовательность $\{x_k\}$ сходится к X^*. За счет выбора множеств H_i и Q_i построены различные алгоритмы метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В.П. Методы погружения в задачах оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1977.

© Заботин Игорь Ярославич,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлёвская, 18, Казань, 420008, Россия, тел. (843) 233-71-56.
E-mail: IYaZabotin@mail.ru

© Яруллин Рашид Саматович,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлёвская, 18, Казань, 420008, Россия.
E-mail: snakbag@mail.ru

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ТРАНСПОРТИРОВОК ОДНОРОДНОГО ПРОДУКТА ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДОВ ДВУХЭТАПНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.В. Колосницын

Для поиска оптимального плана транспортировок однородного продукта от поставщиков к потребителям рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования, расширяющая аналогичную постановку из [1]:

$$\sum_{i\in I_p}\varphi_i(b_i)+\sum_{j=1}^{n}c_j|x_j|+\sum_{i\in I_c}\sum_{k=1}^{M_i}p_{ik}(q_i^+\nu_{ik}^++q_i^-\nu_{ik}^-)\to\min, \tag{1}$$

$$0\le b_i\le\bar{b}_i,\quad -d_j\le x_j\le d_j,\quad i\in I_p,\quad j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ \ i\in I_p,\quad 0=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ \ i\in I_0, \tag{3}$$

$$\nu_{ik}^+-\nu_{ik}^-=b_{ik}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i\in I_c,\quad \nu_{ik}^+\ge 0,\quad \nu_{ik}^-\ge 0,\quad k=\overline{1,M_i}. \tag{4}$$

Множество I_p обозначает множество производителей, I_c – это множество потребителей, I_0 – это множество узлов ветвления. Целевая функция (1) включает издержки $\varphi_i(b_i)$ на производство продукта в $i-$м узле в объеме b_i, издержки $c_j|x_j|$ на транспортировку продукта по $j-$й дуге и средний штраф. Учитываются производственные ограничения и ограничения на пропускные способности (2). Связи между узлами задаются с помощью балансовых соотношений (3)-(4), где a_{ij} — элементы матрицы инциденций. Случайный спрос в узле $i\in I_c$ принимает значения b_{ik} с вероятностями p_{ik}, $i=\overline{1,M_i}$, переменные ν_{ik}^+, ν_{ik}^- обозначают дефицитное и избыточное предложения продукта в узле i, соответствующие реализации b_{ik}. Параметры q_i^+, q_i^- — штрафные коэффициенты за дефицитное и избыточное предложение.

Как правило, задача (1)-(4) есть задача выпуклого программирования очень большой размерности за счёт введения переменных ν_{ik}^+, ν_{ik}^-. Предлагается редукция к задаче выпуклой недифференцируемой оптимизации с неявно заданной целевой функцией, не содержащей переменных ν_{ik}^+, ν_{ik}^-, для решения которой используется метод аналитических центров. Приводятся результаты численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Сов. радио, 1974. – 400 с.

© Колосницын Антон Васильевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 644033, Россия,
тел. (3952) 42-47-00, факс (3952) 42-67-96.
E-mail: steem_kas@mail.ru

О ПОИСКЕ ОПТИМИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В КВАДРАТИЧНО-КВАДРАТИЧНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧАХ

А.В. Малышев, А.В. Орлов

В работе рассматривается задача двухуровневой оптимизации в оптимистической постановке с выпуклыми квадратичными целевыми функциями на верхнем и нижнем уровнях иерархии [1, 2]:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\langle y, Qy\rangle + \langle d, y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y}, \quad Ax + By \le b, \\ y \in \operatorname*{Argmin}\limits_{y} \left\{ \frac{1}{2}\langle y, C_1 y\rangle + \langle xQ_1 + d_1, y\rangle \;\middle|\; A_1 x + B_1 y \le b_1 \right\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{BP})$$

где $A \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $C, Q, C_1 \ge 0$.

Одним из распространенных приемов для решения подобного сорта задач является замена задачи нижнего уровня ее необходимыми и достаточными условиями оптимальности типа Каруша-Куна-Таккера и примение к полученной задаче метода штрафа [1, 3]. В результате, задача $(\mathcal{BP})$ сводится к серии невыпуклых задач оптимизации, для численного решения которых может быть использована стратегия глобального поиска в задачах d.c. минимизации [4]. Основными этапами алгоритмов глобального поиска, основанных на этой стратегии, являются: локальный поиск, доставляющий критическую точку, и процедуры выхода из текущей критической точки, основанные на условиях глобальной оптимальности [3, 4].

Апробация разработанного алгоритма проводится на задачах, построенных с помощью специального метода генерации тестовых задач вида $(\mathcal{BP})$ с известными локальными и глобальными решениями [2]. Идея этого метода состоит в построении двухуровневых задач произвольной размерности путем объединения произвольного количества задач-ядер небольшой размерности с известными решениями. Далее используется линейное преобразование координат, чтобы избавиться от сепарабельности построенной задачи.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00270а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. – Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.
2. Calamai P., Vicente L. Generating Quadratic Bilevel Programming Test Problems // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1994. – Vol. 20. – P. 103-119.
3. Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V. On computational search for optimistic solutions in bilevel problems // J. Glob. Opt. – 2010. – Vol. 48, № 1. – P. 159-172.
4. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003.

© Малышев Антон Валентинович, Орлов Андрей Васильевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 45-30-82, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: anton@irk.ru, anor@icc.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ КУРНО ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗДЕРЖКАХ

И.М. Минарченко

Рассматривается модель Курно с n участниками, издержки которых заданы многочленами третьей степени, а обратная функция спроса является линейной:

$$\begin{gathered} F_i(x) = \left(d - a\sum_{j=1}^{n} x_j\right)x_i - c_i(x_i) \to \max_{x_i}, \\ c_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i, \quad 0 \le x_i \le \bar{x}_i,\ a > 0, d > 0, \\ \alpha_i > 0, \beta_i < 0, \gamma_i > 0, \delta_i \ge 0, \beta_i^2 \le 3\alpha_i\gamma_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Издержки такого вида моделируют участок входа на рынок. Целью является изучение вопроса о существовании равновесий (по Нэшу) и их поиск. Как известно автору, модель Курно в постановке (1) ранее не рассматривалась.

Стандартный подход к решению с использованием системы вариационных неравенств неприемлем с практической точки зрения. В то же время (1) является потенциальной игрой [1]. В докладе показано, что поиск равновесий удобно производить путём максимизации потенциальной функции $P(x)$, являющейся невогнутой (равновесия следует искать среди локальных максимумов, глобальный — всегда равновесие):

$$\begin{gathered} P(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[-\alpha_i x_i^3 - (a+\beta_i)x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \tfrac{a}{2}\sum_{j\ne i} x_j\right)x_i\right] \to \max, \\ 0 \le x_i \le \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

Для решения задачи глобальной оптимизации (2) предлагается специальный метод ветвей и границ в сочетании с методами локального поиска, быстро сходящийся к глобальному максимуму; все методы основаны на использовании квадратичных опорных функций [2]. Приводятся результаты численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Monderer D., Shapley L.S. Potential Games // Games and Economic Behavior. – 1996. – № 14. – P. 124-143.
2. Khamisov O.V. A Global Optimization Approach to Solving Equilibrium Programming Problems // Series on Computers and Operation Research. – 2003. – Vol. 1, Optimization and Optimal Control. – P. 155-164.

© Минарченко Илья Михайлович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия.
E-mail: sla669@gmail.com

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕВЫПУКЛОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И.В. Мокрый, О.В. Хамисов

Рассматривается следующая задача квадратичного программирования

$$q_0(x) \to \min, \tag{1}$$

$$q_i(x) = 0,\ i \in L, \tag{2}$$

$$q_i(x) \le 0,\ i \in M, \tag{3}$$

$$x \in \Pi = \{x : \underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i, i = 1, \dots, n\}, \tag{4}$$

где $q_i(x) = x^T Q^i x + (c^i)^T x + r_i$, $i \in 0 \cup L \cup M$ – квадратичные функции, L, M – индексные множества, Q^i – $n \times n$ симметричные матрицы, $c^i \in \mathsf{R}^n$, $r_i \in \mathsf{R}$, $i \in 0 \cup L \cup M$, $\underline{x}_i < \overline{x}_i, i = 1, \dots, n$.

В докладе приводится описание вычислительного комплекса для решения задачи глобальной оптимизации (1)-(4). Комплекс содержит автоматическую классификацию исследуемых задач, выделяя задачи минимизации вогнутой квадратичной функции на выпуклом многограннике, задачи минимизации произвольной квадратичной функции на выпуклом множестве, заданном ограничениями-неравенствами, обратно-выпуклые задачи и т.д. В соответствии с классификацией в комплексе реализован соответствующий набор методов глобальной минимизации [1]. В основе практически всех методов лежит общая схема ветвей и границ. По сравнению с предыдущей версией, представляемый комплекс содержит ряд алгоритмов локального поиска, что в значительной степени ускоряет решение задач (1)-(4).

Доклад посвящён представлению комплекса и описанию результатов тестирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horst R., Tuy H. Global Optimization. (Deterministic Approaches), 3rd, revised and enlarged edition. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

© Хамисов Олег Валерьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96.
E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

© Мокрый Игорь Владимирович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96.
E-mail: ygr@isem.sei.irk.ru

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КВАДРАТИЧНОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ

Е.Г. Мусатова

Рассмотрим квадратично-линейную двухуровневую задачу в следующей постановке [1,2]:

$$\left.\begin{array}{c} F(x,y) \triangleq \frac{1}{2}\langle Cx,x\rangle + \langle c,x\rangle + \frac{1}{2}\langle C_1 y,y\rangle + \langle c_1,y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y}, \\ x \in X \triangleq \{x \in I\!R^m \mid Ax \le b\}, \\ y \in Y_*(x) \triangleq \operatorname{Arg}\min\limits_{y} \Big\{ \langle d,y\rangle \mid y \in Y(x) \triangleq \{y \in I\!R^n \mid A_1 x + B_1 y \le b^1\} \Big\} \end{array}\right\} (\mathcal{BP})$$

где A, A_1, B_1, C, C_1 — матрицы размерности $(p \times m)$, $(q \times m)$, $(q \times n)$, $(m \times m)$, $(n \times n)$ соответственно, а $c \in I\!R^m$, $c_1, d \in I\!R^n$, $b \in I\!R^p$, $b^1 \in I\!R^q$ — заданные векторы. Пусть $C = C^T \ge 0$, $C_1 = C_1^T \ge 0$.

Рассматривается оптимистическая постановка задачи, т.е. предполагается, что игроки верхнего и нижнего уровня действуют совместно, поэтому из всех решений нижнего уровня выбирается то, которое благоприятствует достижению цели верхнего уровня.

Для решения поставленной задачи предлагается методика [3], основанная на использовании теории глобального поиска для задач с ограничениями, задаваемыми d.c. функциями, т.е. функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций. Подобный подход уже был успешно применен ранее для линейно-линейных задач двухуровневого программирования [4], позволив решить задачи до размерности 500 переменных на каждом уровне.

Проведен вычислительный эксперимент на задачах с большим количеством локальных экстремумов, а также сравнение предлагаемого подхода с методом штрафа [5].

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00270-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
2. Dempe S. Foundations of bilievel programming. – Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
3. Стрекаловский А.С. Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями // ЖВМ и МФ. – 2005. – Т. 45, № 3. – С. 435-447.
4. Груздева Т.В., Петрова Е.Г. Численное решение линейное двухуровневой задачи // ЖВМ и МФ. – 2010. – Т. 50, № 10. – С. 1715-1726.
5. Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В. Численное решение одного класса задач двухуровневого программирования // СибЖВМ. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 201-212.

© Мусатова Елена Геннадьевна,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65, Москва, 117997, Россия, тел. (495) 334-88-10.
E-mail: nekolyap@mail.ru

ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК В ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧЕ С МАТРИЧНОЙ ИГРОЙ НА НИЖНЕМ УРОВНЕ

А.В. Орлов, Т.В. Груздева

В работе рассматривается задача двухуровневой оптимизации в оптимистической постановке с параметрической матричной игрой [1] на нижнем уровне:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c,x\rangle + \langle d_1,y\rangle + \langle d_2,z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z}, \\ x \in X = \{x \in I\!R^m \mid Ax \le a,\ x \ge 0,\ \langle b_1,x\rangle + \langle b_2,x\rangle = 1\}, \\ (y,z) \in C(\Gamma M(x)), \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{BP}_{\Gamma M})$$

где $C(\Gamma(x))$ – множество седловых точек игры

$$\left.\begin{array}{l} \langle y,Bz\rangle \uparrow \max\limits_{y},\ \ y \in Y(x) = \{y \mid y \ge 0, \langle e_{n_1},y\rangle = \langle b_1,x\rangle\}, \\ \langle y,Bz\rangle \downarrow \min\limits_{z},\ \ z \in Z(x) = \{z \mid z \ge 0, \langle e_{n_2},z\rangle = \langle b_2,x\rangle\}. \end{array}\right\} \qquad (\Gamma M(x))$$

$c, b_1, b_2 \in I\!R^m$, $y, d_1 \in I\!R^{n_1}$; $z, d_2 \in I\!R^{n_2}$; $a \in I\!R^p$; $b_1 \ge 0,\ b_1 \ne 0,\ \ b_2 \ge 0,\ b_2 \ne 0$; A, B – матрицы и $e_{n_1} = (1,...,1)$, $e_{n_2} = (1,...,1)$ – векторы соответствующих размерностей.

Заменой игры на нижнем уровне ее условиями оптимальности задача $(\mathcal{BP}_{\Gamma M})$ преобразуется в следующую эквивалентную задачу:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c,x\rangle + \langle d_1,y\rangle + \langle d_2,z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z,v}, \\ Ax \le a,\ \ x \ge 0,\ \ \langle b_1,x\rangle + \langle b_2,x\rangle = 1, \\ y \ge 0,\ \ \langle e_{n_1},y\rangle = \langle b_1,x\rangle,\ \ \langle b_2,x\rangle(yB) \ge ve_{n_2}, \\ z \ge 0,\ \ \langle e_{n_2},z\rangle = \langle b_2,x\rangle,\ \ \langle b_1,x\rangle(Bz) \le ve_{n_1}. \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{PM})$$

Можно показать [2] эквивалентность двухуровневой задачи $(\mathcal{BP}_{\Gamma M})$ и задачи $(\mathcal{PM})$.

Сложность решения задачи $(\mathcal{PM})$ создает наличие $n_1 + n_2$ невыпуклых (d.c.) ограничений, которые можно свести к одному [3]. Для осуществления локального поиска в задаче $(\mathcal{PM})$ применяется специальный метод, разработанный ранее [4] для задач с одним невыпуклым ограничением, основу которого составляют спуск на поверхность уровня d.c. функции и решение линеаризованных задач.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00270-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.: Высшая школа, 1998.
2. Orlov A.V. Bilevel problems with matrix and bimatrix games at the lower level and d.c. constraint optimization // Proceedings of the II Inter. conference OPTIMA-2011, Petrovac, Montenegro, 2011. – P. 171-174.
3. Horst R., Tuy H. Global Optimization. Deterministic Approaches. – Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1993.
4. Груздева Т.В., Стрекаловский А.С. Локальный поиск в задачах с невыпуклыми ограничениями // ЖВММФ. – 2007. – Т. 47, № 3. – С. 397-413.

© Орлов Андрей Васильевич, Груздева Татьяна Владимировна,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел.(3952) 453082, факс(3952) 511616.
E-mail: anor@icc.ru, gruzdeva@icc.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХ СЛУЧАЕВ ЗАДАЧИ БИЛИНЕЙНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ МНОЖЕСТВ

А.В. Орлов, С.Ю. Пинигин

Исследуется задача билинейной отделимости множеств. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два конечных множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, состоящих из m и k точек соответственно. Эти множества можно описать с помощью матриц $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Задача заключается в отыскании двух гиперплоскостей $H_1(\omega^1,\gamma^1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle\omega^1, x\rangle = \gamma^1,\ \omega^1 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma^1 \in \mathbb{R}\}$ и $H_2(\omega^2,\gamma^2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle\omega^2, x\rangle = \gamma^2,\ \omega^2 \in \mathbb{R}^n,\ \gamma^2 \in \mathbb{R}\}$, отделяющих заданные множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Возможны несимметричный (1) и симметричный (2) варианты расположения множеств относительно отделяющих гиперплоскостей.

$$\left.\begin{array}{l} \langle A^i,\omega^1\rangle > \gamma^1, \\ \langle A^i,\omega^2\rangle > \gamma^2, \\ \left.\begin{array}{l}\langle B^j,\omega^1\rangle < \gamma^1 \\ \langle B^j,\omega^2\rangle < \gamma^2.\end{array}\right] \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\langle A^i,\omega^1\rangle > \gamma^1, \\ \langle A^i,\omega^2\rangle > \gamma^2,\end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l}\langle A^i,\omega^1\rangle < \gamma^1, \\ \langle A^i,\omega^2\rangle < \gamma^2,\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}\langle B^j,\omega^1\rangle > \gamma^1, \\ \langle B^j,\omega^2\rangle < \gamma^2,\end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l}\langle B^j,\omega^1\rangle < \gamma^1, \\ \langle B^j,\omega^2\rangle > \gamma^2.\end{array}\right\} \end{array}\right\} \quad (2)$$

В частности, несимметричная задача билинейной отделимости может быть сведена к эквивалентной невыпуклой задаче билинейной оптимизации с несвязанными переменными [1] :

$$\left.\begin{array}{c} F(z^1,z^2) = \langle z^1,z^2\rangle \downarrow \min\limits_{z,\omega,\gamma} \\ (z^1,\omega^1,\gamma^1) \in Z_1 \triangleq \left\{ (z^1,\omega^1,\gamma^1) \in \mathbb{R}^K \left| \begin{array}{c} -A\omega^1 + \gamma^1 e_m + e_m \le 0, \\ B\omega^1 - \gamma^1 e_k + e_k \le z^1,\ \ z^1 \ge 0, \end{array} \right. \right\} \\ (z^2,\omega^2,\gamma^2) \in Z_2 \triangleq \left\{ (z^2,\omega^2,\gamma^2) \in \mathbb{R}^K \left| \begin{array}{c} -A\omega^2 + \gamma^2 e_m + e_m \le 0, \\ B\omega^2 - \gamma^2 e_k + e_k \le z^2,\ \ z^2 \ge 0, \end{array} \right. \right\} \end{array}\right\} \quad (\mathcal{BLP})$$

где e_m, e_k — векторы из единиц размерности m и k соответственно; z^1, z^2 — вспомогательные переменные. Задача же симметричной билинейной отделимости эквивалентна специальной задаче билинейной оптимизации со связанными переменными [1].

Для решения этих задач разработаны алгоритмы, базирующиеся на методе глобального поиска [2] в задачах билинейного программирования общего вида. Проведены вычислительные эксперименты по тестированию алгоритмов на большой серии специально сгенерированных тестовых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennett K.P., Mangasarian O.L. Bilinear Separation of Two Sets in n-Space // Computational Optimization and Applications. – 1993. – №2. – P. 207-227.
2. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

© Орлов Андрей Васильевич, Пинигин Сергей Юрьевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 644033, Россия,
тел. (3952) 45-30-63, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: anor@icc.ru, grey@irkutsk.ru

ОБ ОДНОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

М.В. Янулевич, А.В. Орлов

В последнее время популярным объектом в исследовании операций являются задачи с иерархической структурой, возникающие на практике при исследовании сложных систем (в энергетике, экономике и т.д.) (например, см. [1,2]). В данной работе рассматривается задача поиска оптимистического решения следующей динамической двухуровневой задачи:

$$\begin{cases} J_1(u,y) = \varphi_1(x(t_1),y) + \int\limits_T F_1(t,x(t))\,dt \downarrow \min\limits_{u,y}, \\ y \in Y, \quad (x(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{D}_*(y), \end{cases} \qquad (\mathcal{BP})$$

где $T = [t_0,t_1]$, $Y \subset I\!R^r$ — выпуклый компакт, а $\mathcal{D}_*(y)$ является множеством решений задачи нижнего уровня

$$\begin{cases} J_2(u) = \varphi_2(x(t_1)) + \int\limits_T F_2(t,x(t))\,dt \downarrow \min\limits_{u}, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \\ u \in \mathcal{U} = \{u \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U(y) \quad \overset{\circ}{\forall} t \in T\}. \end{cases} \qquad (\mathcal{FP}(y))$$

Пусть для любого $y \in Y$ в задаче оптимального управления $(\mathcal{FP}(y))$ выполняются стандартные предположения (см. [2-4]), и, кроме того, $U(y) = \{v \in I\!R^r \mid 0 \le v_i \le y_i, \quad i = \overline{1,r}\}$. Задача $(\mathcal{BP})$ рассматривается в предположении выпуклости функций $(x,y) \mapsto \varphi_1(x,y)$, $x \mapsto \varphi_2(x)$, а также подынтегральных функций $x \mapsto F_1(t,x)$ и $x \mapsto F_2(t,x)$, $t \in T$. Задача $(\mathcal{BP})$, вообще говоря, является невыпуклой (см. [1,2]). Ее решение предлагается осуществлять посредством редукции к невыпуклой задаче оптимального управления (например, см. [3,4]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №11-01-00270-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dempe, S. Foundations of Bilevel Programming. – Dordrecht: Kluwer, 2002.
2. Ye J.J. Necessary conditions for bilevel dynamics optimization problems // SIAM J. Control and Optimization. – 1995. – Vol. 33, № 4. – P. 1208-1223.
3. Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, № 7. – С. 1187-1201.
4. Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. К решению невыпуклых задач оптимального управления с терминальным целевым функционалом // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11, № 2. – С. 111-122.

© Янулевич Максим Викторович, Орлов Андрей Васильевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 45-30-82, (3952) 45-30-63, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: max@irk.ru, anor@icc.ru

СТРАТЕГИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ НА ОПТОВОМ РЫНКЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Н.И. Айзенберг, М.А. Киселёва

Работа посвящена изучению взаимодействия экономических агентов на рынке электроэнергетики, где цена формируется как равновесная. Генераторы электроэнергии предоставляют оператору рынка свои функции предложения, потребители – спрос. Исследовался вопрос о том, какую стратегию поведения выберут производители при формировании предложения на рынок.

Все изученные модели можно объединить в класс моделей олигополии, где рассматривается зависимость выпуска конкурентных фирм от цены, установившейся на рынке, с учётом того, что на эту цену будут влиять объёмы производства каждого генератора. Функции предложения называются предполагаемыми, так как фирмы могут только догадываться о реакции своих конкурентов. В них присутствуют так называемые коэффициенты влияния каждого участника на ситуацию в целом.

Пусть $D(p) = N - \gamma\, p$ — линейная функция совокупного спроса, где γ — положительная величина;

$$C_i\left(q_i\right) = \frac{1}{2} c_i q_i^2 + a_i q_i,$$

$c_i > 0, a_i \neq 0, i = \overline{1,n}$, — издержки фирмы i, квадратичные строго выпуклые функции, V_i — максимально вырабатываемая мощность фирмы i.

Основная задача производителя:

$$\pi_i\left(p\right) = p \cdot q_i\left(p\right) - a_i q_i\left(p\right) - \frac{1}{2} c_i q_i^2\left(p\right) \to \max_{q_i},\ i = \overline{1,n}.$$

Стратегией будет предоставление функции предложения в виде

$$q_i\left(p\right) = \frac{p - a_i}{c_i - \frac{w_i}{\gamma}},$$

w_i — индекс влияния i-й фирмы на выпуск отрасли в целом. В зависимости от того, какие значения будет принимать этот индекс или насколько существенным окажется влияние одной фирмы на общую функцию предложения, мы получим разные модели функционирования рынка, в том числе Курно, равновесия функций предложения с конкурентных окружением и без него. Все модели рассматривались с учётом ограничений на мощность. Тестирование моделей было проведено на примере электроэнергетической системы зоны Сибирь.

© Айзенберг Наталья Ильинична,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: ayzenberg.nata@gmail.com

© Киселёва Марина Александровна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: marinee@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С.М. Анцыз

Исследуется иерархическая система (неклассический рынок), состоящая из субъектов нижнего уровня (например, предприятий) и администрации региона либо государства. Цель исследований – выбор схемы управления, с помощью которой достигается равновесие по Штакельбергу между желаниями: увеличить темпы роста экономики и уменьшить ущерб окружающей среде. Для решения проблемы предлагается двухэтапной процесс.

Первый шаг процесса заключается в нахождении квот d_{kt} на нанесения ущерба для каждого субъекта. Предполагается, что задан желаемый темп снижения ущерба окружающей среде: ρ. Управление верхнего уровня максимизирует темп роста экономики Z при условиях $\sum\limits_{k\in\Lambda}\psi_k(t) \le (1-\rho)\sum\limits_{k\in\Lambda}\psi_k(t-1), \quad t=\overline{1,T}$ (считается, что величины $\psi_k(0)$ известны). Функционал Z определяется формулой $\min\limits_{t=\overline{1,T}} \frac{\sum\limits_{k\in\Lambda}\varphi_k(t)}{\sum\limits_{k\in\Lambda}\varphi_k(t-1)}$. Здесь $\varphi_k(t) = \sum\limits_{\tau=1}^{t}[C^1_{k\tau}X_{k\tau} - C^2_{k\tau}Y_{k\tau}]$ – валовая прибыль k-го предприятия за периоды с первого по t, C^1_{kt} и C^2_{kt} – векторы цен на продукты и ресурсы соответственно. Векторы продуктов и ресурсов X_{kt}, Y_{kt} находятся при решении линейно-программных задач предприятий, содержащих ограничения вида: $\psi_k(t) = p^1_{kt}X_{kt} + p^2_{kt}Y_{kt} \le d_{kt}$, где p^1_{kt} и p^2_{kt} – векторы коэффициентов вредности выпускаемых продуктов и затрачиваемых ресурсов соответственно. Λ – множество номеров субъектов.

На втором шаге процесса изучается новая модель рынка торговли квотами (см. [1]). В отличие от изложенной в [2] в рамках новой модели показана возможность существования таких национальных и международных рынков. Задача первого этапа является задачей двухуровневого программирования. Учет структуры ограничений позволяет редуцировать ее и некоторые из рассматриваемых в докладе задач к конечной последовательности задач линейного программирования, т. е. получить алгоритмы с полиномиальной трудоемкостью.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 10-06-00168-а, № 10-06-00057-а, № 12-01-00667-а) и РГНФ (проект № 12-32-01012-а1).

ЛИТЕРАТУРА

1. unfccc.int>resource/docs/convkp/kprus.pdf
2. Анцыз С.М., Высоцкая Т.В. Двухуровневые модели оптимизации экологического налогообложения. – Новосибирск, 2006. – 34 с. – (Препринт. РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 166).

© Анцыз Сергей Матвеевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383)363-46-04, факс (383)333-25-98.
E-mail: antzys@math.nsc.ru

МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА (ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФРОБЕНИУСОВОЙ МАТРИЦЫ)

Н.Н. Астафьев

Рассмотрим межотраслевую балансовую модель Леонтьева “затраты–выпуск” и ей двойственную :

$$D\colon Ax + c = x,\ x \geq 0, \qquad D^*\colon uA + p = u,\ u \geq 0.$$

Здесь $A = (a_{ij}) \geq 0$ — технологическая матрица затрат в натуральных единицах $e_1, \ldots, e_n$ для продукции n отраслей, x, c — векторы производства и потребления продукции этих отраслей соответственно, u, p — векторы цены и прибыли соответственно. Запись моделей D и D^* соответствует матричным операциям.

Будем считать матрицу $A \geq 0$ неразложимой и продуктивной, что означает существование фробениусовых собственного значения $0 < \lambda^0 < 1$, правого $x^0 > 0$ и левого $u^0 > 0$ собственных векторов для λ^0, при этом можно считать $(u^0, x^0) = 1$ [1].

Рассмотрим матрицу $L(A) = x^0 \cdot u^0 = (x_i \cdot u_j)_{n\times n}$ [1, стр. 587]. Для приведенных интерпретаций D и D^* матрица $L(A)$ является матрицей денежных отраслевых потоков матрицы A. Назовем ее фробениусовой матрицей к A.

Выпишем для $L(A)$ суммы: по i-й строке $\triangle_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^0 u_j^0$ — стоимость продукции x_i^0 по совокупной цене $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^0$; по i-му столбцу $\triangle_i^* = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^0 u_i^0$ — стоимость по цене u_i^0 всей продукции x^0. Назовем величину $\triangle = \sum\limits_{i=1}^{n} |\triangle_i - \triangle_i^*|$ мерой сбалансированности матрицы $L(A)$. Если в A перейти от единиц $e_1, \ldots, e_n$ к единицам $e_1^1, \ldots, e_n^1$, где $e_i = k_i e_i^1$, $i \in \overline{1,n}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) > 0$, то новая матрица будет иметь вид $A(k) = KAK^{-1}$, где K — диагональная матрица с вектором k.

Для матрицы $L(A)$ сформулируем следующую задачу сбалансированности.

Найти вектор $k > 0$, для которого фробениусова матрица $L(A(k))$ была бы симметрической, т.е. ее мера сбалансированности равнялась нулю.

Очевидно, для $A(k)$ соответствующие фробениусовы величины будут λ^0, Kx^0, u^0K^{-1} и фробениусова матрица $L(A(k)) = Kx^0 \cdot u^0K^{-1} = KL(A)K^{-1}$.

Обозначим через $\triangle(k)$ меру сбалансированности $L(A(k))$.

У т в е р ж д е н и е 1. Существует вектор $k^0 > 0$, при котором $K^0x^0 = (u^0 \cdot (K^0)^{-1})^T$ и $\triangle(k^0) = 0$ и $k_i^0 = +(u_i^0/x_i^0)^{1/2}$ $(i \in \overline{1,n})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00273) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.

© Астафьев Николай Николаевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (3433) 75-34-23, факс (3433) 74-25-81.
E-mail: astnn@imm.uran.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СРЕДСТВ

Е.М. Бронштейн

Рассматриваются дискретные моменты времени $0, 1, \ldots, n, \ldots$ Пусть средства в размере a_n, полученные в процессе производства в момент n, расходуются на потребление (b_n) и на реинвестиции $(a_n - b_n)$. Для каждого момента определена производственная функция $f_n(t)$; ее значение – это средства, полученные в процессе производства в момент $n+1$ при вложении суммы t в момент n. Также определен дисконт-множитель $q \in (0, 1)$.

Целью производственной деятельности является максимизация средств, направленных на потребление, в дисконтированной форме. Таким образом, рассматривается следующая оптимизационная задача. Пусть $a_0 > 0$ – начальная сумма, $b_0 = 0$. Необходимо найти бесконечномерные вектора $(a_1, a_2, \ldots)$ и $(b_1, b_2, \ldots)$ такие, что $0 \le b_n \le a_n$, $a_{n+1} = f_n(a_n - b_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n \to max$.

Предполагается, что как отдельные производственные функции, так и их совокупность, обладают следующими свойствами: каждая из функций f_n возрастающая; $f_n(0) = 0$; функции f_n вогнутые, дифференцируемые, производные функций строго убывают; функции f_n и их производные ограничены в совокупности; производство не вырождено. Последнее означает, что $f_n(t) > t$ на некотором интервале $(0, c)$ при всех n. Полагаем, что $a_0 \le c$. Установлено, что решение сформулированной задачи существует.

Выделены некоторые классы производств.

- Производство *депрессивное*, если $f'_{n+1}(t) \le f'_n(t)$ при всех n, t.
- Производство *прогрессирующе*, если $f'_{n+1}(t) \ge f'_n(t)$ при всех n, t.
- Производство *стабильное*, если функции f_n совпадают.

Установлена структура решения задачи для стабильных и депрессивных производств.

Рассмотренная задача примыкает к классу задач Рамсея-Касса-Купманса.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-06-00001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Интриллигатор М. Математические методы оптмизации и экономическая теория. – М.: Айрис-Пресс, 2002.
2. Беленький В.З. Оптимизационные модели экономической динамики. Понятийный аппарат. Одномерные модели. – М.: Наука, 2007.

© Бронштейн Ефим Михайлович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 273-79-67, факс (347) 272-29-18.
E-mail: bro-efim@yandex.ru.ru

МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА С ПЕНСИОННОЙ СИСТЕМОЙ

Н.П. Дементьев

В рассматриваемой модели жизнь человека распадается на два периода. В первом периоде жизни индивид работает, и его доход состоит из заработной платы w. Располагаемый доход равен $(1-\tau)w$, где τ — ставка пенсионного налога. Взносы τw сразу же идут на выплату текущих пенсий. Располагаемый доход распадается на потребление c_1 и инвестиции s:

$$c_1 + s = (1-\tau)w. \tag{1}$$

Инвестиции реализуются в виде производственных фондов, которые функционируют в последующем периоде и срок их службы – один период. Во втором периоде жизни индивид не работает, а его потребление c_2 финансируется из пенсии τw и дохода от инвестиций rs:

$$c_2 = \tau w + rs, \tag{2}$$

где r – плата за пользование производственными фондами.

При заданных w, r человек делит заработную плату таким образом, чтобы его функция полезности $u(c_1, c_2)$ достигала максимума при ограничениях (1)–(2). Подобные задачи хорошо исследованы в литературе. Однако задача поведения отдельного индивида является лишь блоком предлагаемой нами более общей модели, в которой параметры w, r определяются внутри модели, а не задаются экзогенно. В модель вводится производство, описываемое с помощью однородной первой степени производственной функции $F(K, L) = LF(k, 1) = Lf(k)$, где K – объем производственных фондов, а $k = K/L$ – их объем на одного работающего. Параметры w, r определяются как предельные производительности капитала и труда:

$$r = F'_K(K, L) = f'(k), \qquad w = F'_L(K, L) = f(k) - f'(k)k. \tag{3}$$

Принимается, что количество работающих L не меняется от периода к периоду (тогда и количество пенсионеров всегда равно L). Задача нахождения стационарного решения в общей модели формулируется так: найти такое k, чтобы при параметрах w, r, определенных из (3), оптимальное решении индивида (c_1, c_2, s) таково, что $s = k$. Сравнение стационарных решений при различных значениях параметра τ позволяет судить, как пенсионная система влияет на основные экономические макропоказатели. На конкретных примерах показано, что она может способствовать уменьшению производственного накопления в экономике.

© Дементьев Николай Павлович,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
пр-т Академика Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090,
тел. (383) 330-35-36, факс: (383) 330-25-80.
E-mail: dement@ieie.nsc.ru

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ ЗАМКНУТОГО ТИПА

А.О. Захаров

В работе рассматривается задача многокритериального выбора в условиях нечеткой информации, включающая в себя множество возможных решений X, векторный критерий $f = (f_1, \ldots, f_m)$ и нечеткое бинарное отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu(\cdot, \cdot)$, заданные на X. $Y = f(X)$ – множество возможных векторов. Используется аксиоматический подход сужения множества Парето [1], в рамках которого выполняется нечеткий принцип Эджворта – Парето: множество Парето является верхней оценкой для нечеткого множества выбираемых векторов $C(Y)$. Предполагается, что множество $C(Y)$ есть гипотетический выбор лица, принимающего решение (ЛПР), в условиях удовлетворения всем вкусам и предпочтениям. Вводится нечеткая замкнутая информация об отношении предпочтения, представляющая собой замкнутую цепочку из конечного числа простейших «квантов информации» [2]. А именно, следующее: один критерий f_{i_1} важнее другого критерия f_{i_2} с определенной степенью уверенности μ_1 в таком предпочтении (ради увеличения значения по более важному критерию ЛПР готово понести потери по менее важному критерию), критерий f_{i_2} важнее критерия f_{i_3} со степенью уверенности μ_2 и т. д., критерий f_{i_k} важнее критерия f_{i_1} со степенью уверенности μ_k. Причем $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ и не равны между собой, $\mu_1, \ldots, \mu_k \in (0, 1]$. Нечеткая замкнутая информация является взаимозависимой, поэтому устанавливается условие, при котором она будет непротиворечивой, иначе говоря, применимой в процессе принятия решений. Основным результатом являются теоремы об учете информации такого типа, согласно которым справедливы неравенства: $\lambda_Y^C(y) \leq \lambda_Y^M(y) \leq \lambda_Y^P(y)$ для всех $y \in Y$, где $\lambda_Y^C(\cdot)$, $\lambda_Y^M(\cdot)$, $\lambda_Y^P(\cdot)$ – функции принадлежности нечеткого множества выбираемых векторов $C(Y)$, «новой» нечеткой векторной оценки (нечеткое множество M), множества Парето, соответственно. Таким образом, данная «новая» оценка сверху для множества $C(Y)$ является более точной, чем множество Парето. Полученный результат указывает более узкие границы выбора (в пределах нечеткого множества M) в условиях введенной модели предпочтений и, в итоге, упрощает его.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00449.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (изд. 2, испр. и доп.). – М.: Физматлит, 2005.
2. Ногин В. Д. Принцип Эджворта – Парето и относительная важность критериев в случае нечеткого отношения предпочтения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 11. – С. 1676-1686.

© Захаров Алексей Олегович,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетский пр-т, 35, Петергоф, Санкт-Петербург, 198504, Россия,
тел. (812) 428-71-59.
E-mail: zakh.alexey@gmail.com

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Н.А. Лукьянова, Д.В. Семенова

На сегодняшний день для анализа социально-экономических систем активно применяют методы математического моделирования. Данные системы отличаются сложной структурой связей между элементами системы, отражающих их взаимодействие. Элементы системы порождаются случайными событиями и множествами случайных событий (эвентологическими системами). Чем больше событий содержит данное множество событий, тем более сложными структурами вероятностных зависимостей событий оно обладает. Поэтому существует необходимость в анализе и синтезе сложных статистических взаимосвязей между элементами этих систем.

Множество случайных событий [1] $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, или (что эквивалентно), *случайное множество событий* $K : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \to \left(2^{\mathfrak{X}}, 2^{2^{\mathfrak{X}}}\right)$ под конечным множеством событий $\mathfrak{X}$ можно определить задав на множестве $2^{\mathfrak{X}}$ всех подмножеств конечного множества $\mathfrak{X}$ функцию множеств: $p_X = \mathbf{P}(X \subseteq K)$— *Э-распределение II-рода*, где $X \in 2^{\mathfrak{X}}$, т.е. $X \subseteq \mathfrak{X}$. Для многих эвентологических задач [1] и моделей социо-экономических систем входным параметром является Э-распределение. Однако на практике из статистики нам доступны, как правило, лишь вероятности моноплетов событий $p_x = \mathbf{P}(x \in K)$, $x \in \mathfrak{X}$. В связи с этим поведение системы исследуется только на трех основных структурах зависимостей: вложенной, непересекающейся и независимой. В данной работе рассматриваются три метода аппроксимации Э-распределений: 1) энтропийный метод, основанный на принципе максимума энтропии Э-распределения; 2) метод Фреше-граничных распределений и 3) метод, использующий ассоциативные функции [2]. Использование рассмотренных выше методов привело, на наш взгляд, к очень интересным и практически важным результатам, которые требуют дальнейшего более глубокого анализа и исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев О.Ю. Эвентология. – Красноярск: СФУ, 2007.
2. Alsina C., Frank M.J., Schweizer B. Beasley J.E. Associative functions. Triangular Norms and Copulas. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.

© Лукьянова Наталья Александровна,
Институт фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета,
ул. Киренского, 26а, каб. Д3-03, Красноярск, 660074, Россия, тел. (391) 2-912-594.
E-mail: nata00sfu@gmail.com

© Семенова Дарья Владиславовна,
Институт математики Сибирского федерального университета,
пр-т Свободный, 79, каб. 34-12, Красноярск, 660041, Россия,
тел. (391) 206-20-87, факс (391) 206-21-67.
E-mail: dariasdv@gmail.com

ПРЯМАЯ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МАРКОВИЦА ДЛЯ НЕЧЕТКИХ СОБЫТИЙ

Я.В. Нартов, Н.А. Лукьянова, Д.В. Семенова

Задача оптимального распределения ресурсов в рыночных системах имеет важное значение как в практической сфере, так и в области теории, поэтому она находится в центре внимания исследователей уже долгое время. В середине 20 века Марковиц предложил решать задачу распределения капитала на фондовом рынке методами портфельного анализа. Идеи Марковица были положены в основу целого ряда современных работ по портфельному анализу различных рынков. В работе [1] был предложен перевод классической задачи Марковица на эвентологический язык, в результате которого возникли сразу две задачи – прямая и обратная эвентологические (Э-задачи) Марковица [2]. В [2, 3] была предложены постановки Э-задачи Марковица для нечетких событий. В данной работе рассматривается решение двух задач: параметрической прямой Э-задачи Марковица и прямой Э-задачи Марковица для нечетких событий. При решении первой задачи использовались метод Вульфа-Фрэнка для задач квадратичной оптимизации и метод Марковица-Шарпа (метод критических линий). Также построено решение прямой эвентологической задачи Марковица для нечетких событий. Исследованы примеры решения задач для различных структур зависимостей событий. Выявлена особенность дефаззификации эвентологической пули в случае нечетких событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев О.Ю. Эвентология. – Красноярск.: СФУ, 2007.
2. Воробьев О.Ю., Клочков С.В. Эвентологический анализ задач распределения и заполнения ресурсов. – Красноярск: Красноярский гос.торг.экон.ин-т., 2007.
3. Нартов Я.В., Семенова Д.В. О прямой эвентологической задаче Марковица для нечетких событий // Труды IX международной ФАМЭТ'2010 конференции / под.ред. О.Ю. Воробьева. – Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2010. – С. 210-214.

© Нартов Яков Викторович,
Институт математики Сибирского федерального университета,
пр-т Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия.
E-mail: yanartov@yandex.ru

© Лукьянова Наталья Александровна,
Институт фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета,
ул. Киренского, 26а, каб. Д3-03, Красноярск, 660074, Россия, тел. (391) 2-912-594.
E-mail: nata00sfu@gmail.com

© Семенова Дарья Владиславовна,
Институт математики Сибирского федерального университета,
пр-т Свободный, 79, каб. 34-12, Красноярск, 660041, Россия,
тел. (391) 206-20-87, факс (391) 206-21-67.
E-mail: dariasdv@gmail.com

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ АКТИВОВ БАНКА

Н.А. Орозбеков

В [1] исследована задача оптимизации активов банка, где ссудная процентная ставка рассматривалась как константа вне зависимости от объемов и сроков кредитования. Задача принадлежит классу задач математического программирования с нелинейными целевой функцией и ограничениями.

Учет в задаче оптимизации активов влияния объема кредита на ссудную процентную ставку был произведен в [2], где процентная ставка рассматривалась как кусочно-постоянная функция.

Усложнив модель введением процентной ставки в виде линейной функции получим целевую функцию вида:

$$\sum_{i\in I_{12}} c_i x_i + \sum_{i\in I_{11}} (a x_i - b) x_i \to \max,$$

где I_{12} – множество номеров ликвидных активов, I_{11} – множество номеров доходных активов, x_i – размер вложений в i-й актив, c_i – процентная ставка i-го ликвидного актива, a и b – скаляры.

Система нелинейных ограничений примет вид:

$$(a x_i - b - \alpha_i) x_i \le 0, \quad i \in I_{11},$$

где α_i – рентабельность i-го доходного актива.

Данный доклад будет посвящен вопросам существования решения поставленной задачи и нахождению оценок для величин a и b, при которых существует решение.

Утверждение (о существовании решения). Пусть a и b – величины, удовлетворяющие условиям: $0 \le a \le 1$ и $b \ge 0$. Если $b \ge \alpha_i$ хотя бы для одного номера $i \in I_{11}$, то множество допустимых решений задачи непусто.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-06-00057-а, 10-06-00168-а, 12-01-00667-а и РГНФ 12-32-01012-а1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орозбеков Н.А. Нелинейные модели оптимизации банковских активов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Том VIII, №4 (24). – С. 73-90.
2. Орозбеков Н.А. Задача оптимизации активов с дифференцированной ставкой процентов. – Препринт/РАН. Сиб. отделение. Ин-т математики; №196. – Новосибирск, 2007. – 13 с.

© Орозбеков Нурлан Аскарович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-04.
E-mail: nur15@rambler.ru

УЧЕТ ДИСКОНТНОЙ ПЛАТЫ ЗА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЫРЬЯ В СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПРОГРАММЫ МЕГАПРОЕКТА

Н.И. Пляскина

В настоящее время возрастает значимость крупных инвестиционных проектов (мегапроектов) освоения углеводородных ресурсов новых регионов как комплекса проектов отраслевых систем. Предлагаемое исследование направлено на использование аппарата сетевых моделей для оценки альтернативных сценариев реализации инвестиционной программы мегапроекта. Сетевая модель представлена в виде ориентированного графа $G = (J, U)$, где J – множество вершин графа, соответствующих работам, U – множество дуг, задающих отношение предшествования. Требуется найти оптимальное расписание работ с учетом ограничений на ресурсы складируемого типа $k \in K$, (K – множество видов ресурсов: сырьё, материалы с большим сроком хранения, инвестиции и др.) и на дисконтную плату за использование сырья S^0 (характеризует выгодность данного проекта для инвестора), при котором достигает минимума целевая функция.

Формально рассматриваемая задача может быть записана следующим образом:

$$C_{max} = max_j(s_j + p_j) \to min,$$

где C_{max} – время завершения проекта, s_j – время начала j-ой работы, p_j – продолжительность j-ой работы;

1. $s_i + p_i \leq s_j$, для $i \prec j$ – ограничения предшествования;

2. $\sum\limits_{\tau=1}^{t} \sum\limits_{j \in J(\tau)} r_{jk} \leq \sum\limits_{\tau=1}^{t} q_{k\tau}, \ \ \forall t \in [1, C_{max}]$ – ограничения на складируемые ресурсы, где r_{jk} – интенсивность потребления k–го ресурса работой j, $k \in K$, Q_{kt} – наличие ресурса k в момент t, $J(t) = \{j \mid s_j < t < s_j + p_j\}$ – множество работ, выполняемых в момент t;

3. $\sum\limits_{k \in K} \sum\limits_{\tau=1}^{C_{max}} \sum\limits_{j \in J(\tau)} r_{jk} c_{k\tau} \alpha^{\tau-1} \leq S^0$ – ограничение на дисконтную плату за использование сырья, где $c_{k\tau}$ – плата за использование k-го ресурса в момент τ, α – коэффициент дисконтирования, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha = \frac{1}{1+\beta}$, β – банковский процент;

4. $s_j \in Z^+$, $j \in J$ – требование на переменные.

Для разработки алгоритма решения поставленной задачи сформулировано и доказано утверждение: дисконтная плата за использование ресурсов достигает своего минимума при T–позднем расписании, что позволяет вести поиск оптимального расписания среди поздних допустимых расписаний методом дихотомии. Алгоритм реализован для дискретного случая по двум ресурсам.

© Пляскина Нина Ильинична,
ИЭОПП СО РАН, пр-т Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия,
НГУ, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
телефон/факс: (383) 330-28-26, (383) 330-25-80.
E-mail: pliaskina@hotmail.com; pliaskina@ieie.nsc.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫМИ БЛУЖДАНИЯМИ

Э.О. Рапопорт

Изучается динамическая экономическая система с дискретным временем, состояния которой в каждый момент времени характеризуются набором из двух продуктов – целыми неотрицательными точками двумерного векторного пространства. Рассматривается k различных производств, в каждом из которых состояние системы может изменяться на некоторый случайный вектор с целыми компонентами (a_i, b_i) и наборами вероятностей $\{p_{ij}\}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k$, для j-го производства.

Под управлением системой будем понимать выбор в каждый момент времени одного из производств, т.е. в каждом состоянии системы (x, y) выбор одного из имеющихся случайных блужданий. Цель управления – минимизация вероятности выхода из первого квадранта.

Случай $k = 2$ исследовался в [1, 2]. Весьма полезным оказалась введенная в [1] система уравнений (названная ассоциированной системой). Пусть единственное (помимо точки (0,0)) решение этой системы есть положительная точка (β^*, α^*). Тогда можно получить (см. [1]) следующую двухстороннюю оценку вероятности вырождения $g(x, y)$, связанную с решением (β^*, α^*): **при** $(x, y) \to \infty$ **справедливо асимптотическое отношение** $g(x, y) = = O(e^{-(\alpha^* x + \beta^* y)})$.

Пусть $k > 2$. Разделив все производства на две группы по предпочтениям первого или второго продуктов, можно доказать, что

существует такая пара производств (одно из первой группы, одно из второй), использование которых приводит к наименьшей асимптотической вероятности вырождения.

При доказательстве существенно используется введенное в [2] понятие согласованных цен, которое дает возможность ранжировать всевозможные пары производств.

Работа поддержана грантами РФФИ № 10-06-00168, № 12-01-00667-а и грантом РГНФ № 12-01-00667.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рапопорт Э.О. Об одной модели распределения неделимого ресурса // Дискретный анализ и исследование операций. – 2005. – Серия 2, Т. 12, № 1. – С. 55-73.
2. Рапопорт Э.О. Распределение неделимого ресурса: оптимальное управление и цены // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Том XII, № 3(39). – С. 75-84.

© Рапопорт Эрнест Ошерович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383)363-46-06, факс (383)333-25-98.
E-mail: rapoport@math.nsc.ru

О НАЛОГООБЛОЖЕНИИ ФОНДОВ В МОДЕЛИ РАМСЕЯ-СОЛОУ

А.А. Рылова

Исследуется модифицированная двухуровневая модель Рамсея-Солоу. Предполагается, что в каждый момент времени объём выпущенной продукции Y делится на налог N, потребление C, инвестиции (капиталовложения) I:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N(t) = \rho(K)K(t)+$$

$$+(1 - s(t))(Y(t) - \rho(K)K(t)) + s(t)(Y(t) - \rho(K)K(t)),$$

$0 \leq \rho(K) \leq 1,\ 0 \leq s(t) \leq 1$, где $\rho(K)$ — ставка налогообложения, $s(t)$ — доля выпуска (за вычетом налогов), которая идёт на инвестиции. Задача инвестора состоит в отыскании оптимальной функции $s(t)$, при которой общее удельное потребление (на одного работника) с дисконтированием в плановом периоде $[0, T]$ достигает максимального значения. Задача государства заключается в выборе схемы налогообложения ρ, которая максимизирует суммарные налоговые поступления.

В работе излагается решение указанной задачи при двух формах налогообложения: 1) единый пропорциональный налог (при котором налоговая ставка устанавливается в едином проценте к базе налогообложения) и 2) линейно возрастающая ставка налогообложения (непрерывный аналог прогрессивного налога).

Предполагается, что государство задаёт схему налогообложения и величину (в случае постоянного налога) либо скорость изменения (при линейно возрастающем налоге) налоговой ставки. Инвестор, зная стратегию государства и считая, что она фиксирована, максимизирует свою функцию полезности — общее удельное потребление. Государство выберет ту стратегию, при которой в течение рассматриваемого периода времени $[0, T]$ собирается больший объём налогов. Возникает задача с двумя уровнями управления, аналогичная поиску равновесия по Штакельбергу.

Для обеих рассматриваемых форм налогообложения доказаны магистральные теоремы об оптимальном значении доли инвестиций для нижнего уровня управления. Для важных частных случаев выведены формулы для определения оптимальных значений ставок налогообложения для обеих схем. Показано преимущество постоянного налога над линейно возрастающим с точки зрения увеличения поступлений в бюджет [1].

Работа поддержана грантами РФФИ 10-06-00168, 12-01-00667-а и грантом РГНФ 12-32-01012-а1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рылова А.А. О налогообложении фондов в модели Рамсея-Солоу. – Новосибирск, 2011. – Препринт/РАН. Сиб. Отд-ние. Ин-т математики; № 269.

© Рылова Анна Анатольевна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (913) 722-34-79.
E-mail: mikva@ngs.ru

ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ В ДОБЫВАЮЩИХ ОТРАСЛЯХ

М.С. Степанова

В [1] рассматривались три модели освоения рудного месторождения, содержащие задачи нелинейного математического программирования, часть переменных которых дискретна. Инвестиционные проекты, описываемые этими моделями, начинались обязательно с освоения месторождения и завершались либо получением и продажей руды, либо переработкой руды и продажей концентратов, либо производством и реализацией металлов и сопутствующих конечных продуктов.

В настоящее время конечные продукты добывающих отраслей часто получаются по схеме, отличной от рассмотренных в [1]. Например, для получения алюминия руду или концентраты (глинозем) покупают на внутреннем либо внешнем рынках; далее производится металл и сопутствующие конечные продукты, которые реализуются на различных рынках. В докладе предлагается математическая модель, описывающая этот инвестиционный процесс. Она была адаптирована для оценки инвестиционного проекта освоения Карабашского месторождения, содержащего один вид руды. Из этой руды можно получить кианитовый концентрат и некоторые конечные продукты (слюда, кварц, рутил). Рассматриваются модели инвестиционных проектов: реализация проекта без складирования продуктов (в двух вариантах: более простой, когда производственные мощности считаются заданными, и более сложный, когда эти мощности варьируются) и реализация проекта со складами.

На практике, зачастую, некоторые этапы указанной модели не реализуются, потому, например, что концентраты для получения металлов импортируются. Предложен эффективный алгоритм для решения возникающих в новой модели задач математического программирования. Алгоритм базируется на методе внутренней точки Дикина [2]. Найденные с помощью предыдущих [1] и новой модели оценки инвестиционных проектов позволяют определить наиболее эффективный способ получения конечных продуктов.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 10-06-00168-а, № 10-06-00057-а и № 12-01-00667-а) и РГНФ (проект № 12-32-01012-а1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанова М.С. О сравнении инвестиционных проектов в добывающей отрасли // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск, НГУ, 2010. – С. 304.
2. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек. – Новосибирск: Наука, 1980.

© Степанова Мария Сергеевна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-04, факс (383) 333-25-98.
E-mail: miraays@gmail.com

БЕЗЫНФЛЯЦИОННОСТЬ КАК ОПТИМАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭКОНОМИКИ

В.Л. Чечулин, В.С. Леготкин

Рассматривается модель равновесного состояния экономики государства, в которой равновесное состояние экономики соответствует её безынфляционности. Математизация оборота общественно необходимого времени (ОНВ) получена путем приравнивания меры неопределенности затрат ОНВ к мере неопределенности высвобождения ОНВ, умноженной на вероятностную меру этого высвобождения, относительно всего обращаемого в экономике ОНВ, принимаемого в отчетный период за единицу. Равенство этих двух неопределенностей позволяет учесть наличие свободы у человека: 1) высвобожденное ОНВ свободно используется человеком и обществом, 2) затраты ОНВ реализуются в процессе свободного труда. Неопределенности, относящиеся ко внешнему по отношению к человеку времени, есть лишь условия для реализации внутренних свобод человека, и равенство этих двух неопределенностей отражает баланс этих двух свобод человека. Таким образом, хотя свобода не формализуема, её наличие описывается моделью. Вывод уравнения, описывающего безынфляционное состояние экономики, приведен в [1].

В предложенной модели инфляционные процессы рассматриваются как отклонения от безынфляционного состояния. Комплекснозначный вид уравнения позволяет учесть наличие внешних задолженностей [2]. Безынфляционное состояние экономики является оптимальным для обеспечения долгосрочных инвестиций. Эта модель является первой экономико-математической моделью равновесия (безынфляционного), позволяющей учесть наличие действительной свободы у человека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чечулин В.Л. Модели безынфляционного состояния экономики и их приложения. Монография. – Пермь, 2011.
2. Чечулин В.Л., Леготкин В.Л. Метод анализа устойчивости экономики стран с применением основного логистического уравнения // Совершенствование стратегического управления корпоративными образованиями и региональная промышленная политика перехода к новой инновационной экономике, материалы междунар. научно-практ. конф. – Пермь, ПГНИУ, 2011. – Т. 2. – С. 233-240.

© Чечулин Виктор Львович,
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
ул. им. Букирева, 15, Пермь, 614990, Россия, тел. (342) 2-396-424.
E-mail: chechulinvl@mail.ru

© Леготкин Владимир Сергеевич,
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
ул. им. Букирева, 15, Пермь, 614990, Россия, тел. (342) 2-396-424.
E-mail: mikerise2008@yandex.ru

ОЦЕНКА НЕРАВНОМЕРНОГО РАЗВИТИЯ ТЕРРИТОРИЙ НА ОСНОВЕ МНОГОУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ

М.А. Юдина

В настоящее время актуальной проблемой региональной теории и практики является неравномерное развитие территорий. Проведенный анализ современного методического инструментария показал, что широко используемые для оценки региональной дифференциации традиционные методы математической статистики, рейтинговых оценок и корелляционно-регрессионного анализа содержат существенные ограничения при использовании их для принятия управленческих решений, главным из которых является слабая устойчивость полученных результатов при значительных колебаниях экономической конъюнктуры [1, 2]. Перспективным представляется применение методов структуризации пространства индикаторов в виде региональных кластеров [1].

В данной работе предлагается методика структурного анализа территориальной системы, состоящей из подсистем более низкого порядка. На основе применения аппарата многокритериального анализа по выбранному комплексу показателей строится многоуровневая иерархическая структурная модель региона. Территории, относящиеся к вышестоящим слоям, доминируют нижележащие по всему комплексу выбранных критериев с учетом заданного уровня эквивалентности. При этом данная методика позволяет избежать недостатков рейтинговых моделей, базирующихся на строгой линейной иерархии, а также привязки к средним значениям показателей, на которых основаны методики расчета коэффициентов асимметрии. Полученная структурная модель региона позволяет проводить статический и динамический анализ различий в уровнях социально-экономического развития территорий, оценивать эффективность управленческих решений и разрабатывать меры по корректировке региональной политики. Предложенный подход может быть также использован для формирования модели “идеальной”, желаемой структуры региона в целях индикативного планирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оптимизация территориальных систем / Под ред. д-ра экон. наук С. А. Суспицина. – ИЭОПП СО РАН. – Новосибирск, 2010.
2. Социально-экономические риски: диагностика причин и прогнозные сценарии нейтрализации / Под ред. В.А. Черешнева, А.И. Татаркина. – Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2010.

© Юдина Марина Александровна,
Омский государственный университет путей сообщения,
пр. Маркса, 35, Омск, 644046, Россия, тел. (3812) 31-06-63.
E-mail: myum@inbox.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

А.Ф. Валеева, Е.Ю. Рассадникова

В настоящее время важной задачей является развитие и разработка методов решения задач транспортной логистики, основные цели которых – снижение затрат и снижение времени при перевозке и доставке различных грузов потребителям, а также сокращение используемых транспортных средств. В связи с этим актуальна разработка системы для решения задач транспортной логистики. В работе рассматривается процесс управления материальным потоком, который включает в себя закупку, складирование, производство и сбыт, на примере уфимской компании, производящей и поставляющей реагент заказчикам в требуемом количестве, который используется для защиты трубопроводов от коррозии, а также в качестве исходного сырья для производства присадок к маслам и смазочно-охлаждающим жидкостям. Компания заинтересована в эффективном процессе управления материальными потоками. Для качественного и быстрого решения возникающих вопросов при управлении материальными потоками необходимо создать программный продукт (ПП). В ПП должны быть реализованы следующие модули: закупочная логистика; производственная логистика; распределительная логистика; транспортная логистика; информационная база. Каждый модуль для эффективного управления необходимо рассматривать во взаимосвязи с другими.

При создании программного продукта используются модифицированные методы комбинаторной оптимизации, теории принятия решений, теории графов (для решения задач маршрутизации для грузовых автомобильных и (или) железнодорожных перевозок, задач упаковки различных грузов в большегрузные машины с учетом грузоподъемности и техгологических ограничений транспортировки, задачи выбора поставщиков, задачи выбора емкостей, задачи оценки рисков, связанных с транспортировкой грузов.

Предлагаемый ПП позволит снизить транспортные расходы и затрачиваемое время на движение материального потока, а также повысит уровень обслуживания клиентов.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-07-00579, 12-07-00631.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юсупова Н.И., Валеева А.Ф., Рассадникова Е.Ю., Латыпов И.М., Кощеев И.С. Многокритериальная задача доставки грузов различным потребителям // Логистика и управления цепями поставок. – 2011. – № 5(46). – С. 60-81.

© Валеева Аида Фаритовна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: aidavaleyeva@yandex.ru

© Рассадникова Екатерина Юрьевна
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: rassadnikova.ekaterina@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ РЕСУРСНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА УСЛОВИЙ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ КЛАСТЕРОВ РЕСУРСНЫХ МЕГАПРОЕКТОВ

Э.Х. Гимади, Е.Н. Гончаров, Н.И. Пляскина, В.Н. Харитонова

Формирование межотраслевых производственных кластеров рассматривается как организационно-экономический фактор эффективности реализации ресурсных мегапроектов. Мегапроект представлен сложной совокупностью инвестиционных проектов независимых компаний по добыче, переработке, транспортировке природных ресурсов регионов. Необходим методический инструментарий разработки государственных управленческих решений по формированию кластеров и оценки их влияния как на согласованность во времени и пространстве стратегических интересов компаний–инвесторов, так и на эффективность реализации мегапроекта в целом.

Ресурсно-временные факторы наилучшим образом отражаются в сетевых моделях мегапроектов. Значительные успехи достигнуты в реализации алгоритмов решения большеразмерных задачах календарного планирования по критерию минимума сроков выполнения проекта [1]. Менее продвинутыми остаются задачи с критериями доходности и эффективности проектов.

В докладе представлена постановка дискретной многономенклатурной динамической задачи календарного планирования мегапроекта в условиях ограниченных ресурсов с максимизацией дисконтированного дохода от реализации мегапроекта в целом при соблюдении директивных сроков наступления целевых событий.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00093, 10-01-00195), целевой программы № 15 Президиума РАН (проект № 8 СО РАН), целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б), а также грантом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (гос. контракт 14.740.11.0362).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Гончаров Е.Н., Залюбовский В.В., Пляскина Н.И., Харитонова В.Н. О программно-математическом обеспечении задачи ресурсно-календарного планирования Восточно-сибирского нефтегазового комплекса // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2010. – № 4. – С. 51-62.

© Гимади Эдуард Хайрутдинович, Гончаров Евгений Николаевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-24, факс (381) 333-25-98.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru, gon@math.nsc.ru

© Пляскина Нина Ильинична, Харитонова Виктория Никитична,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
пр-т Академика Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 330-28-26.
E-mail: pliaskina@hotmail.com, kharit@ieie.nsc.ru

РЕФЛЕКСИВНЫЙ АНАЛИЗ КАК ИНСТРУМЕНТ ОПТИМИЗАЦИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ИНФРАСТРУКТУРНЫХ ОТРАСЛЕЙ

А.В. Губер

В рамках теории реформ сформулирована задача поиска оптимальной траектории (последовательности) реформ и предложены методы решения (например, динамическая модель Рамсея по распределению ресурсов между потреблением и расширением производства и задача об оптимальной остановке [3]). Недостатком большинства методов является игнорирование «человеческого фактора», для учета которого целесообразно использовать методы рефлексивного анализа [2, 4]. Реформы – один из элементов (этапов) регулирования, поэтому уместнее разработка методологии оптимизации регулирования в целом. Оптимальное регулирование должно обеспечить своевременный запуск модификации отрасли по наиболее эффективному (самому дешевому из обеспечивающих оптимальный результат) сценарию.

Автором предложен прототип системы поддержки принятия решений в сфере регулирования инфраструктурных отраслей, прошедший апробацию на основе эмпирических данных по регулированию электроэнергетики России (технология прототипирования [4] позволяет результаты, полученные для электроэнергетики, обобщить на все инфраструктурные отрасли). Данная система основана на математической модели отрасли в целом, в которую интегрированы модели деятельности компаний отрасли, учитывающие комплексное управление их рисками [1] (прежде всего, регуляторными и инвестиционными). Система использует методы оптимизации, методы системного и рефлексивного анализа, учитывающие онтологию и рефлексивное окружение регулятора, а также предусматривает формирование обратной связи. Целевая функция подсистемы запуска реформ оптимизирует сумму трансформационных (на реформы) и трансакционных (текущих) издержек экономики страны в условиях экзогенно заданных ограничений (реализуемость набора реформ, учет в их проекте интересов субъектов и их влияния на экономических субъектов и т.п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубакин В.А. Когнитивный подход к решению проблемы сопоставимости в системах управления комплексными рисками. – М.: ВИНИТИ, №1, 2006.
2. Лефевр В.А. Лекции по теории рефлексивных игр. – М.: Когито-центр, 2009.
3. Полтерович В.М. Элементы теории реформ. – М.: Экономика, 2007.
4. Филимонов В.А. Рефлексивный анализ и технологии ситуационного центра // Рефлексивные процессы и управление. Сб. материалов VIII Междун. симп. 18-19 октября 2011 года. – М.: Когито-Центр, 2011. – С. 251-253.

© Губер Алексей Владимирович,
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,
пер. Стремянный, 36, Москва, 117997, Россия, тел. (499) 237-94-09.
E-mail: guberalexey@gmail.com

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ДРЕВЕСНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЛАНТАЦИЙ

Е.В. Губий, В.И. Зоркальцев

В докладе рассматривается возможность создания специальных энергетических плантаций быстрорастущих деревьев вокруг населенных пунктов, для отопления жилищ которых используется получаемая биомасса в виде дров, топливных гранул или брикетов.

Для анализа эффективности энергетической плантации [2] построим математическую модель. Предположим, что площадь плантаций представляет собой круг с радиусом r и с центром в населенном пункте. Круг разделен на t равных сегментов. Количество сегментов равно сроку созревания древесины. Каждый год на одном из сегментов весной осуществляются лесозаготовки, а осенью – посадки.

Пусть величина $R(i,r,t)$ означает объем годового производства топлива, зависящий от радиуса r, количества сегментов плантации t, а также от вида древесины i:

$$R(i,r,t) = S(r,t)\ f_i(t),$$

где $f_i(t)$ – функция прироста древесины на единицу площади (количество тонн условного топлива (т.у.т.), накопленного в биомассе древесины на одном квадратном километре по прошествии t лет после посадки); $S(r,t)$ – площадь сегмента, с которого в данном году осуществляются лесозаготовки (выраженная в квадратных километрах):

$$S(r,t) = \frac{\pi r^2}{t},$$

Приведенные затраты на производство и транспортировку древесного топлива вида i в зависимости от радиуса r и количества секторов t обозначим $C(i,r,t)$.

В докладе планируется рассмотреть следующие задачи.

1. Выбор оптимального набора культур i, срока произрастания t и радиуса лесной площади r для обеспечения заданного потребления в топливе с минимальными издержками:

$$C(i,r,t) \to min,$$

при условии, что объём годового производства топлива равен потреблению,

$$R(i,r,t) = Q.$$

2. Выбор оптимального объема использования древесного топлива в зависимости от цены альтернативного топлива:

$$C(i,r,t) + pL \to min,$$

при условии

$$K(i,r,t) + L = Q,$$

где L – объем использования альтернативного топлива (угля), p – цена альтернативного топлива (включая расходы на транспортировку).

3. Выбор набора культур, сроков и радиуса с учетом случайных колебаний потребности в топливе и случайных отклонений в приросте древесины. Отклонения потребности в топливе на отопление и вероятность их возникновения определяются на основе многолетних метеорологических наблюдений [1].

По оценочным расчетам, в условиях Иркутской области для отопления населенного пункта численностью 5000 человек (годовой норматив потребления теплоэнергии 6093 т.у.т.) радиус плантации должен составлять 3.4 километра. Приведенная оценка позволяет надеяться на возможность эффективного использования энергетических плантаций не только в Иркутской области, но и в других регионах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В.И. Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. – М.: Наука, 1988.
2. Цивенкова Н.М., Амылин А.А. Быстрорастущие плантации тополя – новая энергетическая сырьевая база // ЛесПромИнформ, 2005. – № 8.
http://www.lesprom.spb.ru/jarchive/articles/itemshow/1581

© Губий Елена Валерьевна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-88-27.

© Зоркальцев Валерий Иванович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-88-27.
E-mail: zork@isem.sei.irk.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ ГОРОДА ОМСКА НА ОСНОВЕ ОТКРЫТЫХ ГЕОДАННЫХ "OPEN STREET MAPS"

А.В. Зиновьев

В работах [1, 2] рассматриваются вопросы обеспечения функционирования и развития транспортной сети наиболее надежным способом. Дорожная сеть может испытывать влияние таких факторов, как естественное разрушение в процессе эксплуатации, стихийные бедствия, целенаправленные действия и так далее. Естественным образом возникает задача такого распределения ресурсов на ремонт и модернизацию дорог, при котором надежность сети возрастает максимально. Решение этой задачи требует получения реальных данных о текущем состоянии транспортной сети города и построения соответствующей модели в виде ориентированного взвешенного графа.

В данной работе описан процесс построения такой модели дорожного графа г. Омска, в которой используются актуальные данные о текущем состоянии сети. Для построения дорожного графа необходимо решить две задачи. Первая – уметь получать реальные геоданные о дорогах, перекрестках, развязках и так далее. Вторая – произвести преобразование первичных данных, путем исключения незначащих вершин, ребер, ошибочной информации.

Для достижения поставленных целей на геообъекте уровня города нужны реальные геоданные, собрать вручную которые невозможно. Для получения первичных геоданных используются возможности проекта Open Street Maps. В качестве способа получения исходных данных в формате XML используется сервис веб-запросов XAPI, позволяющий отфильтровать имеющуюся информацию по определенным правилам (только объекты транспортной инфраструктуры, из определенной области). После этого происходит преобразование необходимой информации в модель Ways-Nodes in Routing Graph, хранящуюся в базе данных MySQL. Затем при помощи эвристического алгоритма Cook-raw geodata строится дорожный граф, имеющий приемлемое число вершин и ребер для задач, рассмотренных в работах [1, 2].

Полученный граф может быть использован для решения широкого круга задач, связанных с эксплуатацией и развитием транспортной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиновьев А.В. Анализ надежности городской транспортной сети // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". – Новосибирск: НГУ, 2011. – С. 166.
2. Зиновьев А.В. О задаче распределения ресурсов при развитии транспортной сети // Материалы I Всероссийской конференции "Статистика. Моделирование. Оптимизация". – Челябинск: ЮУрГУ, 2011. – С. 290.

© Зиновьев Алексей Викторович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия.
E-mail: zaleslaw.sin@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.И. Зоркальцев, С.М. Пержабинский

Надежность электроэнергетических систем (ЭЭС) характеризуется рядом свойств: бездефицитность, ремонтопригодность, живучесть, управляемость, устойчивость, безопасность. Далее под надежностью ЭЭС будем понимать степень обеспеченности электроэнергией потребителей, которая определяется частотой, длительностью и глубиной возможных дефицитов мощности в системе.

В Сибирском энергетическом институте АН СССР разработана методика анализа надежности электроэнергетических систем [1], базирующаяся на методе Монте-Карло. Методика состоит из трех блоков.

1. Вероятностный блок, в котором формируются случайные состояния электроэнергетической системы. Это позволяет проигрывать разные возможные ситуации, возникающие при функционировании ЭЭС (случайные колебания нагрузки, отказы оборудования, аварийные и плановые ремонты оборудования).
2. Блок оценки дефицита мощности сформированных расчетных состояний (модель минимизации дефицита мощности [2]).
3. Блок вычисления показателей надежности ЭЭС (вероятность бездефицитной работы системы, математическое ожидание недоотпуска электроэнергии и д.р.).

Изложенная выше схема в настоящее время является наиболее эффективной и универсальной для решения задач анализа надежности ЭЭС.

Осуществляя анализ надежности по указанной методике при разных средствах повышения надежности, можно определить оптимальный состав этих средств, например, гарантирующий достижения заданного уровня показателей надежности с минимальными затратами или ущербом. В докладе обсуждаются результаты разработки и реализации алгоритмов выбора оптимальных средств обеспечения надежности ЭЭС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б. Надежность и резервирование в электроэнергетических системах. – Новосибирск: Наука, 1974.
2. Зоркальцев В.И., Лебедева Л.М., Пержабинский С.М. Модель оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с учетом квадратичных потерь мощности в линиях электропередач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2010. – Т. 13, № 3. – С. 285-295.

© Зоркальцев Валерий Иванович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-88-27.
E-mail: zork@isem.sei.irk.ru

© Пержабинский Сергей Михайлович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: smper@isem.sei.irk.ru

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ТЕРМОРЕЗИСТИВНЫХ МИКРОСЕНСОРОВ

А.Г. Козлов

Тонкопленочные терморезистивные преобразователи широко используются в качестве термочувствительных элементов в различных типах тепловых микросенсоров. Важным параметром данных преобразователей является погрешность измерения, которая должна быть как можно меньше. Основной составляющей погрешности является погрешность, обусловленная саморазогревом измерительным током. Она зависит от многих параметров (величина измерительного тока, конструктивные параметры, условия передачи тепла), поэтому при проектировании тонкопленочных терморезистивных микросенсоров следует использовать такие значения указанных параметров, которые обеспечивают минимальное значение указанной погрешности. Данная задача является оптимизационной задачей. При ее решении терморезистивный микросенсор на термически изолированной структуре следует рассматривать как 2D структуру с распределенными параметрами. В этом случае для оптимального параметрического синтеза терморезистивного микросенсора можно предложить следующий алгоритм.

1. В структуре микросенсора выделяется область, занятая тонкопленочным терморезистивным преобразователем, и определяется зависимость площади этой области от ширины терморезистивного слоя.
2. Определяется зависимость средневзвешенной температура перегрева в выделенной области от ширины терморезистивного слоя. С этой целью используется метод определения распределения температуры в тепловых микросенсорах, предложенный в [1].
3. Осуществляется минимизация целевой функции в виде $Z = (\Delta T^{av} - \Delta T)^2$, где ΔT^{av} – средневзвешенная температура перегрева в области терморезистивного преобразователя; ΔT – абсолютная погрешность измерения температуры терморезистивным преобразователем. Независимой переменной при оптимизации является ширина терморезистивного слоя. Полученное значение ширины терморезистивного слоя обеспечивает требуемую абсолютную погрешность измерения температуры при заданных значениях конструктивных параметров, в первую очередь величины измерительного тока.

Предложенный метод оптимального параметрического синтеза терморезистивных микросенсоров может быть использован при их конструировании и в САПР данных микросенсоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozlov A.G. Analytical modelling of steady-state temperature distribution in thermal microsensors using Fourier method. Part 1. Theory // Sensors Actuators A. Physical. – 2002. – Vol. 101. – P. 283-298.

© Козлов Александр Геннадьевич,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 64-83-18.
E-mail: agk@omsu.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

А.А. Колоколов, Т.Ю. Степанова, Е.Я. Семерханова, В.А. Михаль

Рассматривается группа взаимодействующих предприятий, каждому из которых необходимо выполнить заданный объем работ в установленный период времени. При этом некоторые предприятия могут обладать избыточным количеством ресурсов (поставщики), другие, напротив, испытывать потребность в них (клиенты). Учитываются следующие ограничения: задана схема взаимодействия предприятий по видам работ с информацией об объемах оказываемых услуг [1]; поставщики обладают набором средств оказания услуг (оптимальная комбинация ресурсов); известны производительность каждого средства оказания услуги и затраты на их перемещение. Требуется найти вариант распределения ресурсов для системы предприятий, при котором общее время выполнения всех работ будет минимальным.

Для решения задачи построена модель частично целочисленного линейного программирования. Проведены вычислительные эксперименты для сферы аграрного сектора на примере одного из районов Омской области, которые показали, что предложенная модель перспективна для определения наилучшего варианта использования ресурсов в системе взаимодействующих предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. О решении одной задачи производственного обслуживания АПК / А.А. Колоколов [и др.] // Сборник научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011. – Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2011. – С. 172-175.

© Колоколов Александр Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

© Степанова Татьяна Юрьевна,
Омский государственный аграрный университет им. П.А. Столыпина,
Институтская пл., 1, Омск, 644008, Россия, тел. (3812) 65-33-89.
E-mail: stepanovatatyana@list.ru

© Семерханова Елена Яковлевна,
Омский государственный технический университет,
пр-т Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-33-89.
E-mail: semerkhanova@gmail.com

© Михаль Виктор Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: msheul.san@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОРАНГОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ ПРИ ПОМОЩИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

И.Б. Плесовских

С увеличением размеров вычислительных сетей растет необходимость в их оптимизации для более быстрой и эффективной передачи информации от одного пользователя к другому. Одним из подходов к решению данной задачи является использование генетических алгоритмов.

Использование генетического алгоритма для оптимизации связей вычислительной сети рассматривалось в ряде научных работ (см., например, [1,2]). Однако, в работе [1] в качестве показателя оптимальности выступает лишь стоимость построения сети, а в [2] – надежность сети. В докладе предлагается генетический алгоритм оптимизации топологии сети, учитывающий такие факторы функционирования сети, как надежность, скорость передачи информации по сети и стоимость.

В данной работе рассматривается одноранговая сеть, т.е. сеть, узлы в которой могут выступать как в роли сервера, так и в роли клиента. Исходными данными алгоритма являются параметры некоторого набора узлов: координаты узла на плоскости, вероятность прохождения информации через узел без потерь, траффик, генерируемый узлом, количество информации, которое узел способен обработать без задержек. Решения задачи соответствуют возможным конфигурациям сети, представленным в виде матриц смежности. Целью поиска является создание ориентированного графа, имеющего минимальный суммарный вес всех дуг, а также минимальную среднюю суммарную задержку и максимальную среднюю надежность при передаче информации между узлами.

Решаемая задача является многокритериальной. В данной работе применен один из классических методов решения подобных задач – метод взвешенной функции. В предложенном генетическом алгоритме функция приспособленности F представляет собой сумму трех функций f_1, f_2 и f_3 с различными весами. Каждая из трех функций вычисляет определенный показатель функционирования сети.

В докладе приведены и проанализированы результаты работы алгоритма для одноранговой вычислительной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chou H., Premkumar G., Chu C.-H. Genetic algorithms for communications network design – An empirical study of the factors that influence performance // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2001. – Vol. 5, № 3. – P. 236-249.
2. Dengiz B., Altiparmak F., Smith A. Local search genetic algorithm for optimal design of reliable networks // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 1997. – Vol. 3, № 1. – P. 179-188.

© Плесовских Илья Борисович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр-т Мира, 55а, Омск, 644053, Россия, тел. (951) 412-59-48.
E-mail: iplesovskih@gmail.com

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОБОСНОВАНИИ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ СТРАТЕГИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕГИОНОМ

А.Е. Севастьянова

Социально-экономические системы регионов являются сложными системами, состоящими из множества разнородных взаимосвязанных элементов. Математическое моделирование позволяет обозреть элементный состав, совокупность внутренних и внешних взаимосвязей, выявить в системе синергетические эффекты. Прогнозно-аналитические обоснования управленческих решений (прежде всего долгосрочного и стратегического характера) с необходимостью должны выполняться в многовариантной постановке, с использованием экономико-математических моделей и методов.

Для построения сценариев и ситуационного анализа при обосновании стратегических решений разработан специализированный инструментарий, в основе которого лежит анализ тенденций изменения наиболее значимых факторов и условий с учетом основных зависимостей между элементами и процессами [1].

С учетом мирового опыта [2] наравне с экзогенными факторами, большое внимание уделяется эндогенным факторам: связанным с ресурсами, управлением, институциональными условиями, инновациями, обучением.

Разработано несколько версий имитационной модели социально-экономического развития применительно к нефтегазодобывающим регионам. Цель – прогнозирование основных показателей социально-экономического развития региона во взаимосвязи с динамикой освоения нефтегазовых ресурсов и обоснования управленческих решений стратегического характера.

В формальном аспекте процесс управления региональной социально-экономической системой в рамках модели представляет собой изменение значений ограничений и регулирующих параметров, приводящее к получению нового результата расчетов. В модель вводится специальный блок регионального управления, составными частями которого являются элементы управляющих воздействий (социальной, промышленной, инвестиционной, бюджетно-финансовой политики).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крюков В.А., Севастьянова А.Е., Шмат В.В. Имитационное моделирование и ситуационный анализ в стратегическом управлении социально-экономическим развитием сырьевого региона // Прогнозирование социально-экономического развития региона / Под ред. В.А. Черешнева, А.И. Татаркина, С.Ю. Глазьева. – Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2011. – С. 473-510.

2. Stimson R.J., Stough R.R. Changing Approaches to Regional Economic Development: Focusing on Endogenous Factors. – 2008.
http://www.bcra.gov.ar/pdfs/investigaciones/Paper%20STIMSON.pdf

---

© Севастьянова Анастасия Егоровна,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
пр-т Академика Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 330-09-62, факс (383) 330-25-80.
E-mail: aseva@ieie.nsc.ru

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ТЕПЛООБМЕННИКА

Е.В. Таирова

К настоящему времени имеется значительный опыт проведения динамических расчетов сложных теплоэнергетических объектов и объектов химической технологии, основанных на принципах структурного моделирования и аналитическом решении уравнений динамики, выраженном в виде определенных характеристических функций – передаточной функции, разгонной и импульсной переходных функций. Разрабатываемые при этом модели основаны на предположении линейности процессов, так как только благодаря линеаризации обеспечивается возможность нахождения необходимых выражений для характеристических функций структурных элементов объекта.

Развитие аналитических методов для описания нелинейной динамики радиационных теплообменников при произвольном характере возмущения расхода теплоносителя представлено в работе [1]. Приближенное решение задачи ищется в виде нелинейной суперпозиции разгонных переходных функций, получаемых исходя из аппроксимации непрерывной функции расхода суммой кусочно-постоянных функций.

При этом наблюдается неоднозначная зависимость точности описания динамического процесса от параметров аппроксимирующей функции. Повышение точности аппроксимации за счет уменьшения временного шага, равно, как выбор возможно более крупного шага, одинаково ухудшают точность приближенного решения.

Поэтому в докладе рассматривается задача дискретной (пошаговой) оптимизации для построения оптимальной аппроксимирующей функции при моделировании нелинейной динамики теплообменника, в которой на каждом шаге процесса минимизируется текущее значение среднеквадратического отклонения энтальпии (температуры) от эталонного решения на множестве значений $h(t_i)$ при выполнении ряда ограничений на параметры модели и аппроксимирующей функции, где $h(t_i)$ – значение энтальпии теплоносителя на выходе из теплообменника в моменты времени t_i, $i = 1, ..., N$.

Приводятся результаты численных экспериментов, которые иллюстрируют улучшение точности моделирования по сравнению с [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Таиров Э.А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. – 1989. – № 1. – С. 150-156.

© Таирова Елена Викторовна,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
ул. Чернышевского, 15, Иркутск, 664074, Россия, тел. (902) 515-81-71.
E-mail: Tairova_L@mail.ru

WEB-ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ОТНОШЕНИЙ В ГРУППЕ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РЕФЛЕКСИВНЫХ ИГР

С.А. Толстуха

Теория рефлексивных игр с помощью формальных математических моделей позволяет вычислить, как тот или иной субъект (в группе) будет действовать в некоторой ситуации. С помощью этого инструмента проектная группа ситуационного центра может спрогнозировать поведение субъектов (людей, компаний, стран) в некой ситуации; также проектная группа может вычислить, как можно поменять отношения внутри группы или как можно воздействовать на субъектов группы для оптимального решения текущей задачи (например, предотвратить конфликт). В рамках Комплекса для планшетиста ситуационного центра впервые было создано Web-приложение для решения таких задач [1-3].

Для решения задачи необходимо ввести следующие данные: граф взаимоотношений между субъектами (между каждой парой субъектов отношения определяются как “союз” либо “конфликт”), множества альтернатив, на котором могут действовать субъекты, а также таблица влияний субъектов друг на друга. После ввода данных пользователь получает результат: подмножества альтернатив, которые может выбрать в этой ситуации субъект, либо сообщение о том, что субъект не может выбрать ни одной альтернативы и находится в состоянии фрустрации. Все условия и решения задач сохраняются в базу данных. Благодаря этому возможно решить обратную задачу: найти оптимальные начальные данные, при котором группа субъектов реализует наиболее позитивный (например, бесконфликтный), исход.

Приложение доступно по адресу http://reflection.sergal.ru.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстуха С.А. Проект Интернет-приложения для реализации моделей теории рефлексивных игр В.А. Лефевра // «Информационные технологии и автоматизация управления». Матер. III научно-практическая конф. ОмГТУ. – Омск: ОмГТУ, 2011. – С. 175-177.

2. Толстуха С.А. Программная реализация моделирования поведения субъектов на основе теории рефлексивных игр В.А. Лефевра // «Молодежь, наука, творчество – 2011». IX Межвузовская научно-практическая конф. студентов и аспирантов: сборник статей. – Омск : Омский государственный институт сервиса, 2011. – Ч. 2. – С. 66-67.

3. Толстуха С.А., Филимонов В.А. Прототип реализации теории рефлексивных игр // Матер. Ершовской конф. по информатике (PSI’11). Секция «Информатика образования»: доклады и тезисы. – Новосибирск: Институт систем информатики, 2011. – С. 133-135.

© Толстуха Сергей Александрович,
Омский государственный институт сервиса,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 24-94-45, факс (3812) 24-94-45.
E-mail: serg-al-tol@yandex.ru

ТОЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПОИСКА МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФОВ ДОРОЖНЫХ СЕТЕЙ

А.Р. Ураков, Т.В. Тимеряев

В практических задачах взвешенные графы часто соответствуют некоторой реальной физической сети (например, автомобильных дорог или передачи данных). При проектировании и строительстве таких сетей обязательно учитывается тот факт, что соединение пары узлов связью имеет некоторую себестоимость, которая зависит от длины соединения. В свою очередь, длина соединения некоторым образом задает вес ребра графа. Таким образом, вкупе с некоторыми другими объективными условиями, необходимость снижения себестоимости определяет как топологию самой сети, так и вид графа, который ее описывает.

Важным объектом практического исследования являются дорожные сети. Структура графов этих сетей определяется как стремлением минимизации себестоимости их построения, так и рядом дополнительных условий. К некоторым таким внешним условиям относятся: практическая невозможность прокладки дорог через определенные объекты (горы, дома и т.п.), малое количество сложных соединений, очевидная зависимость строения сети от расположения соединяемых пунктов. Другими словами, взвешенный граф, построенный для такой сети, не является произвольным графом, а, напротив, имеет некоторые особенности, которые могут учитываться при построении алгоритмов.

Предлагаются точные алгоритмы для быстрого нахождения метрических характеристик графа (центр, радиус, диаметр) в условиях вычисленной и не вычисленной матрицы кратчайших расстояний. В предлагаемых алгоритмах ускорение поиска происходит за счет расчета кратчайших расстояний не для всех вершин графа, а только для некоторого подмножества вершин и прекращения поиска по выполнению условия на расстояния от рассматриваемой вершины до опорных. Эксперименты, проведенные на ряде графов дорожных сетей Северной Америки и Европы из свободного доступа [3], показали заметное ускорение (до порядка и более) при использовании предлагаемых алгоритмов в сравнении с решением этих задач существующими методами [1,2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson D.B. Efficient algorithms for shortest paths in sparse graph // Journal of the ACM. – 1977. – № 24. – P. 1-13.
2. Yuster R. Computing the diameter polynomially faster than APSP [Электронный ресурс] // 2010. URL: http://arxiv.org/abs/1011.6181. Дата обращения: 26.04.2012.
3. 9th DIMACS Implementation Challenge - Shortest Paths [Электронный ресурс] // URL: http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/download.shtml. Дата обращения: 26.04.2012.

© Ураков Айрат Ренатович, Тимеряев Тимофей Валерьевич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: urakov@ufanet.ru, timeryaev@yandex.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ И РЕФЛЕКСИВНЫЙ АНАЛИЗ КАК КРОСС-ТЕХНОЛОГИЯ СИТУАЦИОННОГО ЦЕНТРА

В.А. Филимонов

Эффективное применение методов оптимизации для решения сложных практических задач требует многодисциплинарного подхода. Одним из вариантов реализации такого подхода является использование кросс-технологий ситуационного центра [1]. Ситуационный центр является инфраструктурой, на которой организуется пересечение (cross)необходимых информационных технологий.

Примером комплексного подхода является Теория ограничений Э.М.Голдратта. Из многих авторских «изюминок» упомянем здесь только сделанный автором анализ причин систематического искажения экспертных оценок характеристик работ в сетевых графиках, а также описание применяемого подхода в формате бизнес-романов, удачно дополняющих традиционные инструменты обучения. Близкий к этому подход реализован нами в формате рефлексивного театра ситуационного центра [1].

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть задана некоторая структура, которая может быть описана графом, дугам которого приписаны определённые количественные характеристики. Примером такой структуры может быть представление улиц города с указанием длины улиц. Пусть заданы местоположения на этой структуре двух конфликтующих субъектов A и B, причём субъектам оба этих местоположения известны. Задача субъекта A состоит в достижении одного из нескольких определённых узлов (например, автомагистралей, выходящих из города), при этом он должен избежать встречи с субъектом B. Задача субъекта B – встретиться с субъектом A. Если руководствоваться традиционным критерием оптимизации, например, длиной пути (и такой путь рассчитывают современные автонавигаторы), то при отсутствии рефлексивного рассуждения субъект A выберет кратчайший путь, и именно на этом пути его будет ждать субъект B. Стратегия, включающая использование рефлексивных рассуждений, потребует использования подхода, отличного от традиционного подхода к оптимизации, и здесь может быть применён аппарат рефлексивных игр [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филимонов В.А. Информационные технологии и ситуационные центры: точки роста // В кн.: Анисимов О.С., Берс А.А., Жирков О.А. и др. Компоненты информационных технологий для ситуационных центров. – Омск: ООО «Информационно-технологический центр», 2010. – С. 8-29.
2. Лефевр В.А. Лекции по теории рефлексивных игр. – М.: Когито-центр, 2009.

© Филимонов Вячеслав Аркадьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: filimono@ofim.oscsbras.ru

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА БАЙЕСОВСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Ю.Р. Цой

Алгоритмы Байесовской оптимизации (АБО) являются подклассом алгоритмов оценки распределений [1], в которых предполагается, что в пространстве параметров существует распределение, описывающее решения с высоким качеством. Особенностью АБО является то, что в процессе работы алгоритма производится выявление взаимных зависимостей между оптимизируемыми параметрами и динамическая декомпозиция исходной задачи оптимизации, что позволяет повысить эффективность алгоритма поиска решения. Часто в качестве модели зависимостей выступает байесовская сеть доверия, по которой можно восстановить условное распределение оптимизируемых переменных, параметры которого необходимо найти [2].

При решении задачи обучения искусственной нейронной сети, в рамках которой производится оптимизация весов связей, можно предположить, что веса нейронов описываются отдельными распределениями, структура сети определяет характер зависимостей, а распределение весов всей сети соответствует распределению в байесовской сети доверия. Другими словами, информация о структуре нейронной сети позволяет сформировать приближение декомпозиции исходной задачи оптимизации. В работе рассматривается применение этой идеи для обучения нейронных сетей прямого распространения для решения задач сокращения размерности и классификации.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 11-07-00027-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muhlenbein H., Paas G. From recombination of genes to the estimation of distributions I. Binary parameters // Parallel Problem Solving from Nature. – 1996. – P. 178-187.
2. Hauschild M., Pelikan M. An Introduction and Survey of Estimation of Distribution Algorithms. – MEDAL Report 2011004. – 2011.

© Цой Юрий Робертович,
Томский политехнический университет,
пр-т Ленина, 30, Томск, 634050, Россия, тел. (3822) 70-16-09, факс (3812) 70-16-09.
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
пр-т Ленина, 40, Томск, 634050, Россия, тел. (3822) 90-01-87, факс (3812) 90-01-87.
E-mail: yurytsoy@gmail.com

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ РЕКРЕАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Шембелева

Оптимальное функционирование туристско-рекреационного комплекса (ТРК) требует использования разнообразной информации о рекреационных ресурсах, наличии и стоимости услуг, развитии инфраструктуры курортов и т.д. Туристско-рекреационная деятельность, в отличие от других видов экономической деятельности, является информационно насыщенной, а поэтому наибольший социально-экономический эффект от нее достигается путем внедрения новейших информационных технологий.

Принятие управленческих решений на предприятиях ТРК осуществляется на стратегическом, тактическом и оперативном (или операционном) уровнях. Основными целями *стратегического уровня* управления являются: определение системы приоритетов развития предприятия ТРК; оценка перспективных направлений развития предприятия ТРК; выбор и оценка необходимых ресурсов для достижения поставленных целей.

Тактический уровень принятия решений основан на автоматизированной обработке данных и реализации моделей, помогающих решать хорошо и слабо структурированные задачи. К числу основных целей тактического уровня относятся: обеспечение устойчивого функционирования предприятия в целом; создание потенциала для развития предприятия; создание и корректировка базовых планов работ и графиков реализации рекреационных услуг.

Для поддержки принятия стратегических и тактических управленческих решений по развитию предприятий ТРК используются системы поддержки принятия решений (СППР), которые должны иметь достаточно мощный аналитический аппарат с банком экономико-математических моделей. Основными характеристиками таких систем являются: возможность решения сложных задач управления функционированием и развитием предприятий ТРК; наличие технологий аналитического моделирования; гибкость и адаптируемость, возможность легко менять постановки решаемых.

При построении, изучении и применении процедур принятия решений в СППР используются различные технологии аналитического моделирования, используемые при построении банка моделей, которые можно разделить на несколько групп: модели оптимизации, в том числе дискретные и многокритериальные оптимизационные модели; модели, учитывающие неопределенность, прежде всего, имитационные модели и другие модели.

В данной работе помощью технологий аналитического моделирования, использующих систему математического моделирования AMPL (http://www.ampl.com), построен банк моделей оптимизации системы туризма в регионе.

© Шембелева Елена Александровна,
Крымский институт экономики и хозяйственного права,
ул. Желябова, 17, Симферополь, 95000, Украина, тел. (0652) 57-25-35.
E-mail: eshembeleva@gmail.com

СПИСОК АВТОРОВ

Абакумов Константин Сергеевич 98
Адельшин Александр Владимирович 99
Айзенберг Наталья Ильинична 186
Алексеева Екатерина Вячеславовна 100
Алехина Марина Анатольевна 101
Амзин Игорь Викторович 123
Анцыз Сергей Матвеевич 187
Астафьев Николай Николаевич 188
Астраков Сергей Николаевич 102
Афанасьева Любовь Дмитриевна 103
Бадгетдинова Карина Маратовна 166
Бельц Елена Андреевна 104
Береснев Владимир Леонидович 5
Боброва Екатерина Александровна 105
Борисовский Павел Александрович 106
Бронштейн Ефим Михайлович 107, 189
Бураков Сергей Васильевич 108
Бурлакова Наталия Игоревна 109
Быкова Валентина Владимировна 6
Валеева Аида Фаритовна 201
Валиахметова Юлия Ильясовна 110
Васильев Валерий Александрович. 7
Васильев Игорь Леонидович 111, 112
Великанова Юлия Юрьевна 113
Величко Андрей Сергеевич 175
Веснина Дарья Андреевна 114
Воронцова Евгения Алексеевна 176
Галушин Павел Викторович 115
Гильманова Надежда Александровна 107
Гимади Эдуард Хайрутдинович 12, 116, 162, 202
Глебов Алексей Николаевич 117
Гончаров Евгений Николаевич 118, 202
Груздева Татьяна Владимировна 183
Губер Алексей Владимирович 203
Губий Елена Валерьевна 204
Давыдов Иван Александрович 119
Дементьев Николай Павлович 190
Долгушев Алексей Владимирович 120
Емеличев Владимир Алексеевич 121
Еремеев Антон Валентинович 17
Ерзин Адиль Ильясович 22, 122
Заботин Игорь Ярославич 177
Забудский Геннадий Григорьевич 123, 124, 125
Зайнутдинов Руслан Тахирович 126
Замбалаева Долгор Жамьяновна 117

Заозерская Лидия Анатольевна 27, 127
Захаров Алексей Олегович 191
Зиновьев Алексей Викторович 206
Золотых Николай Юрьевич 128
Зоркальцев Валерий Иванович 30, 204, 207
Ильев Виктор Петрович 129, 130
Ильева Светлана Диадоровна 130
Истомин Алексей Михайлович 116
Каррицоса Эмилио 111
Картак Вадим Михайлович 131
Кейнер Татьяна Игоревна 124
Кельманов Александр Васильевич 33, 120, 132, 133, 134, 135
Киселёва Марина Александровна 186
Климентова Ксения Борисовна 112
Кобылкин Константин Сергеевич 136
Коваленко Юлия Викторовна 137
Коваль Антон Андреевич 125
Козин Игорь Викторович 138
Козлов Александр Геннадьевич 208
Колоколов Александр Александрович 209
Колосницын Антон Васильевич 178
Кононов Александр Вениаминович 38
Кононова Полина Александровна 139
Коротков Владимир Владимирович 121
Косарев Николай Александрович 140
Кочетов Юрий Андреевич 43, 174
Кочетова Нина Арнольдовна 141
Кощеев Иван Сергеевич 142
Кучин Андрей Константинович 99
Лазарев Денис Алексеевич 101
Латыпов Ильшат Маратович 143
Леванова Татьяна Валентиновна 144
Леготкин Владимир Сергеевич 199
Лемтюжникова Дарья Владимировна 145
Леонов Валентин Вячеславович 146
Ломов Сергей Александрович 47
Лукьянова Наталья Александровна 193, 192
Магомедов Абдулкарим Магомедович 147
Магомедов Тагир Абдулкаримович 148
Малева Тамара Владимировна 112
Малышев Антон Валентинович 179
Мартынова Евгения Андреевна 149
Масич Игорь Сергеевич 150
Межецкая Мария Александровна 151
Мельников Андрей Андреевич 152
Минарченко Илья Михайлович 180
Михайлова Людмила Викторовна 132

Михаль Виктор Александрович 209
Мокрый Игорь Владимирович 181
Мусатова Елена Геннадьевна 182
Мухачева Марина Андреевна 131, 170
Навроцкая Анна Александровна 129
Нартов Яков Викторович 193
Нурминский Евгений Алексеевич 52
Орлов Андрей Васильевич 179, 183, 184, 185
Орлова Дарья Сергеевна 153
Орозбеков Нурлан Аскарович 194
Панин Артём Александрович 158
Панюков Анатолий Васильевич 57
Панюкова Татьяна Анатольевна 154
Пахомова Ксения Николаевна 155
Пащенко Михаил Георгиевич 156
Перез Чернов Александр Хуанович 47
Пержабинский Сергей Михайлович 207
Петрович Роман Александрович 157
Пинигин Сергей Юрьевич 184
Планкова Валентина Александровна 27
Плесовских Илья Борисович 210
Плотников Роман Викторович 122
Пляскина Нина Ильинична 195, 202
Плясунов Александр Владимирович 158
Поберий Мария Ивановна 168
Подкожурникова Алёна Александровна 159
Попов Леонид Денисович 62
Пяткин Артем Валерьевич 67, 133
Рагулина Елена Викторовна 166
Рамазанов Али Багдаш оглы 160
Рапопорт Эрнест Ошерович 196
Рассадникова Екатерина Юрьевна 201
Романова Анна Анатольевна 161
Романовский Иосиф Владимирович 72
Романченко Семён Михайлович 134
Рыков Иван Александрович 116, 162
Рылова Анна Анатольевна 197
Свириденко Александр Васильевич 163
Севастьянов Сергей Васильевич 74
Севастьянова Анастасия Егоровна 211
Семенова Дарья Владиславовна 193, 192
Семерханова Елена Яковлевна 209
Сервах Владимир Вицентьевич 79, 98, 105, 109, 149
Симанчев Руслан Юрьевич 164
Сиротин Иван Александрович 101
Скарин Владимир Дмитриевич 83
Степанова Мария Сергеевна 198

Степанова Татьяна Юрьевна 209
Стрекаловский Александр Сергеевич 87
Таирова Елена Викторовна 212
Тахонов Иван Иванович 165
Тимеряев Тимофей Валерьевич 214
Ткачук Елена Анатольевна 144
Толстуха Сергей Александрович 213
Уразова Инна Владимировна 164
Ураков Айрат Ренатович 214
Ушаков Антон Владимирович 111
Филимонов Вячеслав Аркадьевич 215
Филиппова Анна Сергеевна 166, 167
Хамидуллин Сергей Асгадуллович 134
Хамисов Олег Валерьевич 92, 181
Хандеев Владимир Ильич 135
Харитонова Виктория Никитична 202
Хасанова Элина Ильдаровна 167
Хачай Михаил Юрьевич 168
Цидулко Оксана Юрьевна 169
Цой Юрий Робертович 216
Черных Илья Дмитриевич 159
Чечулин Виктор Львович 199
Шамардин Юрий Владиславович 122, 126
Шамрай Наталья Борисовна 52
Шангин Роман Эдуардович 171
Шембелева Елена Александровна 217
Шенмайер Владимир Владимирович 120
Шерешик Николай Юрьевич 172
Шмырев Вадим Иванович 96
Щербина Олег Александрович 145, 163
Щербинина Татьяна Александровна 173
Юдина Марина Александровна 200
Янулевич Максим Викторович 185
Яруллин Рашид Саматович 177
Chen Lin 174
Coupechoux Marceau 174
Delorme Xavier 106
Dolgui Alexandre 106
Iellamo Stefano 174
Scheithauer Guntram 170

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные и полупленарные доклады 5

Дискретная оптимизация 98

Непрерывная оптимизация 175

Экономико-математическое моделирование и теория игр 186

Прикладные исследования 201

Список авторов 218

Научное издание

Проблемы оптимизации и экономические приложения

Материалы V Всероссийской конференции

Омск, 2 – 6 июля 2012 г.

Издается в соответствии с оригиналом,
предоставленным редакционной коллегией,
при участии Издательства ОмГУ

Сертификат соответствия № РОСС RU.AE51.H15612
Срок действия с 02.08.2011 г. по 01.08.2012 г.

Подписано в печать 13.06.2012. Формат бумаги 60x84 1/8.
Печ. л. 27,9. Усл. печ. л. 25,9. Уч.-изд. л. 20,2. Тираж 210 экз. Заказ 181.

Издательство Омского государственного университета
644077, г. Омск 77, пр. Мира, 55а
Отпечатано на полиграфической базе ОмГУ
644077, г. Омск 77, пр. Мира, 55а